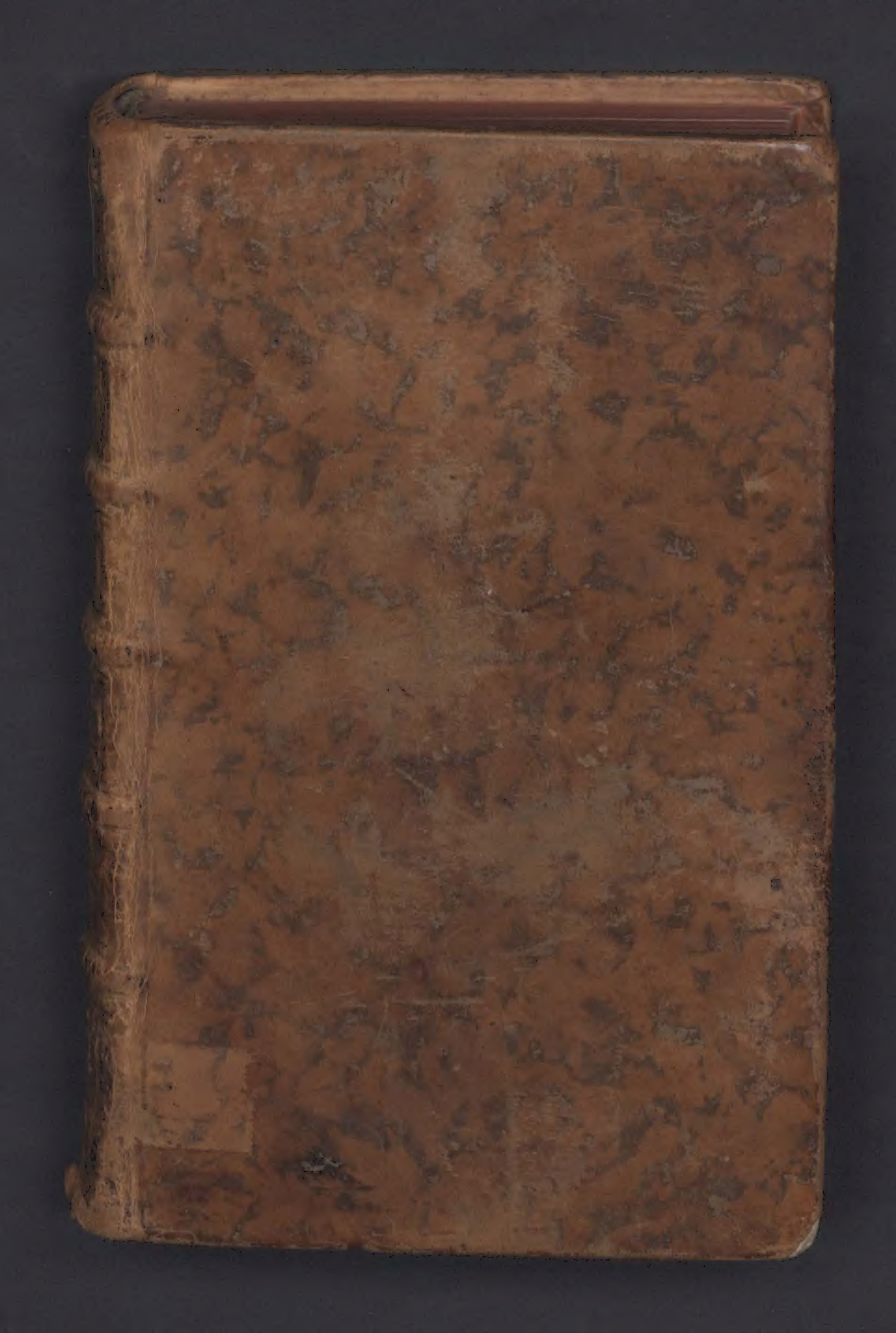


J. M. Dechateaugiron Sous prin-
cipal du collège de Rennes 1775

ÉLÉMENS

D'ALGEBRE.

TOME PREMIER.

ÉLÉMENS

D'ALGEBRE

PAR

M. LÉONARD EULER,

TRADUITS DE L'ALLEMAND,

AVEC DES NOTES ET DES ADDITIONS.

TOME PREMIER.

DE L'ANALYSE DÉTERMINÉE.

A LYON,
Chez JEAN-MARIE BRUYSET, Pere & Fils.
ET A PARIS,
Chez la Veuve DESAINT, Libraire,
rue du Foin-Saint-Jacques.

M. DCC. LXXIV.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

A MONSIEUR,

M. D'ALEMBERT,

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE FRANÇOISE, DES ACADÉMIES ROYALES DES SCIENCES DE FRANCE, DE PRUSSE, D'ANGLETERRE ET DE RUSSIE, DE L'ACADÉMIE ROYALE DES BELLES-LETTRES DE SUEDE, DE L'INSTITUT DE BOLOGNE ET DES SOCIÉTÉS ROYALES DES SCIENCES DE TURIN ET DE NORWEGE.

MONSIEUR,

Il ne nous appartient ni de prononcer sur le mérite de l'Ouvrage dont vous nous avez permis de faire

paroître la premiere édition Françoise sous vos auspices, ni d'ajouter aux éloges qu'il a reçus, soit dans sa langue originale, soit dans la traduction Russe qu'on en a donnée. Le nom seul de M. EULER, *en le rendant précieux aux Mathématiciens, annonce à ceux qui travaillent à le devenir, tout ce qu'ils peuvent s'en promettre.*

M. BERNOULLI, *digne héritier de ce nom si grand dans les Sciences, & Directeur de l'Observatoire de Berlin, s'est chargé de rendre en notre langue le texte de M.* EULER, *& de l'enrichir de quelques Notes historiques. M.* DE LA GRANGE, *dont le rare génie & les nombreux succès fixent depuis long-temps l'attention*

de toute l'Europe savante, a ajouté au mérite de l'Ouvrage, en y joignant un morceau destiné à compléter le traité de l'Analyse indéterminée.

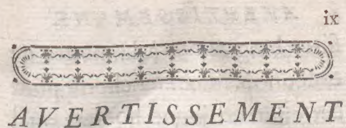
Tout concourt, MONSIEUR, *à établir vos droits sur l'hommage que nous prenons la liberté de vous offrir. C'est au Philosophe, au Mathématicien qui honore son siecle, que nous devions présenter l'Ouvrage d'un homme également destiné à l'illustrer. L'ambition s'attacha souvent au rang pour s'appuyer de la faveur de la protection; un motif qui nous est plus cher nous porte à vous offrir le témoignage public de la reconnoissance que nous devons aux bontés dont vous nous avez honorés. En plaçant votre nom à la tête de ce Livre, nos senti-*

mens pour vous, ***MONSIEUR***, *nous ont ſuggéré le choix qu'auroit pu faire le diſcernement le plus juſte, & nous nous applaudirons dans notre hommage, d'avoir l'Europe entiere pour témoin & pour approbateur.*

Nous avons l'honneur d'être avec le plus profond reſpect,

MONSIEUR,

Vos très-humbles & très-obéiſſans ſerviteurs
J. M. BRUYSET, *pere & fils.*



AVERTISSEMENT DES ÉDITEURS *DE L'ORIGINAL.*

Nous mettons entre les mains des Amateurs de l'Algebre un Ouvrage dont il a déjà paru une traduction Ruſſe il y a deux ans.

Les vues du célebre Auteur étoient de compoſer un Livre élémentaire, au moyen duquel on pût apprendre, ſans aucun autre ſecours, l'Algebre à fond. La perte de ſa vue lui avoit ſuggéré cette idée, l'activité de ſon génie ne lui permit pas de dif-

férer long-temps à la mettre en exécution. M. *Euler* choisit pour cet effet un jeune homme qu'il avoit pris à son service en quittant Berlin, qui possédoit assez bien l'Arithmétique, mais qui n'avoit d'ailleurs aucune teinture des Mathématiques; il avoit appris le métier de Tailleur, & ne pouvoit être mis, quant à sa capacité, qu'au rang des esprits ordinaires. Non-seulement ce jeune homme a très-bien saisi tout ce que son illustre Maître lui enseignoit & lui dictoit, mais il s'est même trouvé en peu de temps en état d'achever tout seul les calculs algébriques les

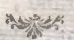
plus difficiles, & de résoudre promptement toutes les questions analytiques qu'on lui proposoit.

Le fait que nous citons doit donner une idée d'autant plus avantageuse de la méthode qui regne dans cet Ouvrage, que le jeune homme qui l'a écrit, qui en a développé les calculs, & dont les progrès ont été si marqués, n'a reçu absolument d'autres instructions que de ce Maître, supérieur à la vérité, mais privé de la vue.

Indépendamment d'un avantage aussi grand, les Connoisseurs verront, avec autant de

plaisir que d'admiration, l'exposition de la doctrine des logarithmes & de sa liaison avec d'autres calculs, ainsi que les méthodes qu'on donne pour la résolution des équations du troisieme & du quatrieme degré.

Ceux enfin que les problemes de *Diophante* peuvent intéresser, seront charmés de trouver dans la derniere section de la seconde Partie, tous ces problemes présentés d'une maniere suivie, & l'explication de tous les procédés de calcul nécessaires pour les résoudre.



AVERTISSEMENT
DU TRADUCTEUR.

LE Traité d'Algebre que j'ai entrepris de traduire, a été publié en Allemand en 1770 par l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. Je m'abstiendrai d'en louer le mérite, ce seroit presque faire injure au nom célebre de son Auteur; il suffira d'ailleurs d'en lire quelques pages, pour voir, par la clarté avec laquelle tout est exposé, quel fruit les Commençans peuvent en retirer. C'est sur d'autres objets que je crois devoir un Avertissement.

Je me suis écarté de la division suivie dans l'original, en faisant entrer dans le premier volume de la traduction Françoise la premiere Section du second volume de l'original, qui complette l'Analyse déterminée.

On ſentira facilement les raiſons de ce changement ; non-ſeulement il favoriſoit la diviſion aſſez naturelle de l'Algebre en Analyſe déterminée & en Analyſe indéterminée, mais il devenoit néceſſaire pour conſerver quelque égalité dans l'épaiſſeur des deux volumes, par rapport aux Additions qu'on trouve à la fin de la ſeconde Partie.

On s'appercevra aiſément à la lecture de ces Additions, qu'elles ne peuvent être que de M. *de la Grange*; auſſi ſont-elles une des raiſons qui m'ont principalement engagé à entreprendre ma Traduction ; je me ſuis félicité d'être le premier à faire voir plus généralement aux Mathématiciens à quel haut point de perfection deux de nos plus illuſtres Géometres ont porté depuis peu une branche de l'Analyſe, peu connue, mais dont on ſent les épines dès qu'on cherche à l'approfondir, & qui, de l'aveu

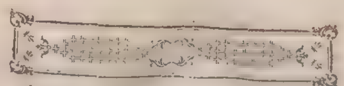
même de ces grands génies, leur a offert les problemes les plus difficiles qu'ils aient jamais réſolus.

Je crois avoir traduit cette Algebre comme on convient qu'il faut traduire des Ouvrages de cette eſpece ; je me ſuis principalement attaché à entrer dans le ſens de l'original & à le rendre avec toute la clarté poſſible ; peut-être même oſerai-je attribuer quelque ſupériorité à ma Traduction ſur l'original, parce que cet Ouvrage ayant été dicté & n'ayant pu être revu par ſon illuſtre Auteur même, il eſt aiſé de concevoir qu'il auroit beſoin dans pluſieurs endroits qu'on y paſſât la lime. Au reſte, ſi je ne me ſuis point aſſervi à traduire littéralement, je n'ai pas laiſſé de ſuivre mon Auteur pas à pas ; j'ai conſervé les mêmes diviſions dans les articles, & c'eſt dans un ſi petit nombre d'endroits que j'ai penſé à ſupprimer quelques détails de calcul, ou à inſérer une

ou deux lignes d'éclairciſſement dans le texte, qu'il ne vaut pas, je crois, la peine d'entrer dans le détail des raiſons qui peuvent me juſtifier.

Je ne dirai rien non plus des notes que j'ai ajoutées à la premiere Partie; elles ſont en aſſez petit nombre pour que je ne craigne pas le reproche d'avoir groſſi inutilement le volume; elles peuvent d'ailleurs répandre du jour ſur differens points de l'hiſtoire des Mathématiques, & faire connoître un grand nombre de tables ſubſidiaires peu connues.

Quant à l'exactitude de la correction, je compte qu'elle ne le cédera en rien à celle de l'original; j'ai comparé avec ſoin tous les calculs, & en ayant refait un grand nombre moi-même, j'ai pu corriger pluſieurs fautes indépendamment de celles qui étoient indiquées dans l'*Errata*.



ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

PREMIERE PARTIE,

Où l'on traite de l'Analyſe déterminée.

SECTION PREMIERE.

Des différentes Méthodes de calcul pour les grandeurs ſimples ou incomplexes.

CHAPITRE PREMIER.

DES MATHÉMATIQUES EN GÉNÉRAL.

I.

ON nomme *grandeur* ou *quantité*, tout ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation & de diminution.

Une ſomme d'argent eſt donc une quan-

tité, puiſqu'on peut y ajouter & qu'on peut en ôter.

Il en eſt de même d'un poids & d'autres choſes de cette nature.

2.

On voit donc facilement qu'il doit y avoir tant de différentes eſpeces de grandeurs, qu'il ſeroit même difficile d'en faire l'énumération : & voilà l'origine des différentes Parties des Mathématiques, chacune d'elles s'occupant d'une eſpece particuliere de grandeurs. Les Mathématiques en général ne ſont autre choſe que la *ſcience des quantités*, ou la ſcience qui cherche les moyens de les meſurer.

3.

Or nous ne pouvons meſurer ou déterminer une quantité, qu'en regardant une autre quantité de la même eſpece comme connue, & en indiquant le rapport de celle-ci à celle-là.

Qu'il s'agiſſe, par exemple, de déterminer la quantité d'une ſomme d'argent, on regardera comme connu un louis, un écu, un ducat ou quelqu'autre monnoie, & on indiquera combien de ces pièces ſont contenues dans ladite ſomme.

De même, s'il étoit queſtion de déterminer la quantité d'un poids, on regarderoit un certain poids comme connu; par exemple, une livre, un quintal, une once, & on indiqueroit combien de fois tel ou tel poids eſt contenu dans celui qu'on détermine.

Veut-on meſurer une longueur ou une étendue, on ſe ſervira d'une certaine longueur connue, telle qu'eſt un pied.

4.

Ainſi les déterminations ou les meſures de grandeurs de toutes eſpeces, reviennent à ceci : Qu'on fixe d'abord à volonté une certaine grandeur de la même eſpece que celle qu'on veut déterminer, afin de la

prendre pour *meſure* ou *unité ;* enſuite, que l'on détermine le rapport qu'a la grandeur preſcrite avec cette meſure connue. Ce rapport s'exprime toujours par des nombres, d'où il s'enſuit qu'un nombre n'eſt autre choſe que le rapport d'une grandeur à une autre priſe arbitrairement pour l'unité.

5.

Il eſt évident par-là que toutes les grandeurs peuvent être exprimées par des nombres, & qu'on doit faire conſiſter ce fondement de toutes les Sciences Mathématiques, dans un traité complet de la ſcience des Nombres & un examen ſoigneux des différentes manieres de calculer qui peuvent ſe préſenter.

On nomme cette partie fondamentale des Mathématiques, l'*Analyſe* ou l'*Algebre* (*).

(*) Pluſieurs Mathématiciens diſtinguent entre *Analyſe* & *Algebre*. Ils entendent par le terme d'*Analyſe* la méthode qui enſeigne à trouver ces regles générales, au

6.

On ne conſidere donc dans l'Analyſe, que des nombres qui repréſentent des quantités, ſans s'embarraſſer des eſpeces particulieres des Quantités. C'eſt dans les autres parties des Mathématiques qu'on s'occupe de ces eſpeces.

7.

On traite des Nombres en particulier dans l'*Arithmétique*, qui eſt la *ſcience des Nombres proprement dite ;* mais cette ſcience ne s'étend qu'à de certaines façons de calculer qui ſe préſentent ordinairement dans la vie commune. L'Analyſe au contraire comprend généralement tous les cas qui peuvent avoir lieu dans la doctrine & le calcul des Nombres.

moyen deſquelles on ſoulage l'eſprit dans toutes les recherches mathématiques ; & ils nomment *Algebre* l'inſtrument que cette méthode emploie pour y parvenir. C'eſt la définition que M. *Bezout* adopte dans la Préface de ſon *Algebre*.

CHAPITRE II.

Explication des Signes + Plus & — Moins.

8.

QUAND il s'agit d'ajouter à un nombre donné un autre nombre, celà s'indique par le ſigne + qu'on met devant ce ſecond nombre, & qu'on prononce *plus*. Ainſi $5 + 3$ ſignifie qu'on doit ajouter encore 3 au nombre 5, & tout le monde ſait qu'il en réſultera 8; de même $12 + 7$ font 19; $25 + 16$ font 41; la ſomme de $25 + 41$ eſt 66, &c.

9.

On a coutume auſſi de ſe ſervir du même ſigne + *plus*, pour lier enſemble pluſieurs nombres; par exemple: $7 + 5 + 9$ ſignifie qu'au nombre 7 il faut ajouter 5 & de plus encore 9, ce qui fait 21. On comprend donc ce que ſignifie la formule ſuivante:

$$8 + 5 + 13 + 11 + 1 + 3 + 10,$$

à ſavoir, la ſomme de tous ces nombres, qui fait 51.

10.

Tout cela ne peut qu'être clair, & il reſte à faire obſerver que dans l'Analyſe on indique les nombres d'une maniere générale par des lettres, comme a, b, c, d, &c. Ainſi, quand on écrit $a + b$, cela ſignifie la ſomme des deux nombres qu'on a exprimés par a & b, & ces nombres peuvent être très-grands ou très-petits. De même $f + m + b + x$, ſignifie la ſomme des nombres indiqués par ces quatre lettres.

Il ſuffira donc toujours de ſavoir quels nombres ont été indiqués par de telles lettres pour trouver auſſi-tôt, par l'Arithmétique, les ſommes ou les valeurs de pareilles formules.

11.

Quand il eſt queſtion, au contraire, d'ôter ou de ſouſtraire un nombre d'un

autre nombre, on indique cette opération par le ſigne —, qui ſignifie *moins*, & qu'on met devant le nombre à ſouſtraire: ainſi

8 — 5

ſignifie que le nombre 5 doit être ôté du nombre 8; ce qui étant fait il reſte 3, comme perſonne ne l'ignore. De même 12 — 7 eſt autant que 5, & 20 — 14 eſt autant que 6, &c.

12.

Il peut arriver auſſi qu'on ait pluſieurs nombres à ſouſtraire d'un ſeul nombre. C'eſt le cas de cet exemple:

50 — 1 — 3 — 5 — 7 — 9.

Cela ſignifie: Otez d'abord 1 de 50, il reſte 49; ôtez 3 de ce reſte, il reſtera 46; ôtez-en encore 5, reſtent 41; ôtez enſuite 7, il reſte 34; ôtez-en enfin 9, reſtent 25; & ce dernier reſte eſt la valeur de la formule propoſée. Mais comme les nombres 1, 3, 5, 7, 9 ſont tous à ſouſtraire, il revient au même de ſouſtraire leur ſomme,

qui eſt 25, toute à la fois de 50; le reſte ſera 25, comme auparavant.

13.

Il eſt de même très-facile de déterminer la valeur de pareilles formules, où les deux ſignes + *plus* & — *moins* ſe rencontrent; par exemple:

12 — 3 — 5 + 2 — 1 eſt autant que 5.

Il n'y a qu'à prendre ſéparément la ſomme des nombres précédés du ſigne +, & en ôter celle des nombres précédés de —. La ſomme de 12 & de 2 eſt 14, celle de 3, 5 & 1, eſt 9; or 9 étant ôté de 14, il reſte 5.

14.

On s'appercevra bien par ces exemples que l'ordre des nombres qu'on écrit eſt très-indifférent & tout-à-fait arbitraire, pourvu qu'on conſerve à chacun ſon ſigne. Rien n'empêcheroit de mettre à la place de la formule du § précédent celles-ci:

12 + 2 — 5 — 3 — 1; ou 2 — 1 — 3 — 5 + 12; ou 2 + 12 — 3 — 1 — 5;

ou encore d'autres; & il faut remarquer que dans la formule proposée, le signe + est censé être mis devant le nombre 12.

15.

On n'aura plus de difficultés non plus quand, pour généraliser ces procédés, on voudra se servir de lettres à la place de nombres réels. Il est clair, par exemple, que

$$a - b - c + d - e$$

signifie qu'on a des nombres exprimés par a & d, & que de ces nombres, ou de leur somme, il faut ôter les nombres exprimés par les lettres b, c, e, & précédés du signe —.

16.

Il importe donc principalement ici de savoir quel signe se trouve devant chaque nombre. De-là vient que dans l'Algebre, les quantités simples sont les nombres considérés avec les signes qui les précedent

ou qui les *affectent*. On nomme *quantités positives*, celles devant lesquelles se trouve le signe +; & *quantités négatives*, celles qui sont affectées du signe —.

17.

La maniere dont on a coutume d'indiquer les biens d'une personne, est très-propre à éclaircir ce que nous venons de dire. On indique par des nombres positifs, & moyennant le signe +, ce qu'un homme possede réellement, au lieu que ses dettes se représentent par des nombres négatifs, ou par le moyen du signe —. Ainsi quand on dit de quelqu'un qu'il a 100 écus, mais qu'il en doit 50, c'est dire que son bien se monte à

100 — 50; ou, ce qui est la même chose, + 100 — 50, c'est-à-dire 50.

18.

Puisque les nombres négatifs peuvent être considérés comme des dettes, en tant

que les nombres poſitifs indiquent des biens effectifs, on peut dire que les nombres négatifs ſont moins que rien. Ainſi quand un homme ne poſſede rien, & qu'il doit même 50 écus, il eſt certain qu'il a 50 écus de moins que rien; car ſi quelqu'un lui faiſoit préſent de 50 écus pour payer ſes dettes, il ne ſeroit encore qu'au point de n'avoir rien, quoiqu'il fût devenu plus riche qu'il n'étoit.

19.

De même donc que les nombres poſitifs ſont inconteſtablement plus grands que rien, les nombres négatifs ſont plus petits que rien. Or on obtient des nombres poſitifs en ajoutant 1 à 0, c'eſt-à-dire, à rien, & en continuant d'augmenter ainſi toujours de l'unité. C'eſt-là l'origine de la ſuite des nombres qu'on nomme *nombres naturels*; en voici les premiers termes:

$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,$

& ainſi de ſuite à l'infini.

Mais ſi au lieu de continuer ainſi cette ſuite par des additions ſucceſſives on la continuoit dans le ſens contraire, en retranchant perpétuellement l'unité, on auroit la ſuite, ou férie ſuivante, des nombres négatifs:

$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$

& ainſi de ſuite juſqu'à l'infini.

20.

Tous ces nombres tant poſitifs que négatifs, ont le nom connu de *nombres entiers*; leſquels par conſéquent ſont ou plus grands ou plus petits que rien. On les nomme ~~*nombres entiers*, pour les diſtinguer~~ d'avec les nombres rompus, & d'avec pluſieurs autres eſpeces de nombres dont nous parlerons dans la ſuite. Car 50, par exemple, étant plus grand d'une unité entiere que 49, on comprend facilement qu'il peut y avoir entre 49 & 50 une infinité de nombres intermédiaires, tous plus grands que 49, & pourtant tous plus petits que 50. On n'a

qu'à se représenter deux lignes, l'une longue de 50 pieds, l'autre longue de 49 pieds, on conçoit aisément qu'on peut tirer un nombre infini de lignes toutes plus longues que 49 pieds, & plus courtes cependant que 50 pieds.

21.

Il importe extrêmement dans toute l'Algebre, que l'on se fasse une idée nette de ces quantités négatives dont il a été question. Je me contenterai de faire remarquer ici d'avance que toutes ces formules, par exemple,

$+1-1$, $+2-2$, $+3-3$, $+4-4$, &c. valent 0 ou rien. Ensuite que

$+2-5$ vaut -3.

Car si quelqu'un a 2 écus & qu'il en doive 5, non-seulement il n'a rien, mais il doit encore 3 écus: de même

$7-12$ est autant que -5.

& $25-40$ vaut -15.

22.

Les mêmes choses doivent s'observer, quand on emploie d'une maniere plus générale des lettres au lieu de nombres; on aura toujours 0 ou rien pour la valeur de $+a-a$. Veut-on savoir ensuite ce que signifie, par exemple, $+a-b$, l'on considérera deux cas:

Le premier a lieu quand a est plus grand que b; il faut alors soustraire b de a & le reste, devant lequel on mettra ou l'on supposera le signe $+$, qui indique la valeur cherchée.

Le second cas est celui où a est plus petit que b; on soustraira dans ce cas a de b, & on prendra le reste négatif, en lui donnant le signe $-$, ce sera la valeur cherchée.

CHAPITRE III.

De la multiplication des Quantités simples.

23.

QUAND on a deux ou plusieurs nombres égaux à ajouter ensemble, on peut exprimer cette somme d'une maniere abrégée; par exemple:

$a+a$ est autant que $2.a$ &
$a+a+a$ ——— $3.a$; de même
$a+a+a+a$ —— $4.a$, & ainsi de suite.

C'est ainsi qu'on peut prendre une idée de la multiplication, & il faut remarquer que:

$2.a$ signifie 2 fois a &
$3.a$ ——— 3 fois a &
$4.a$ ——— 4 fois a, &c.

24.

S'il s'agit donc de multiplier un nombre exprimé par une lettre, avec un nombre quelconque,

quelconque, on met simplement ce nombre devant la lettre; ainsi

a multiplié par 20 fait $20\,a$, &
b multiplié par 30 donne $30\,a$, &c.

On voit aussi que c pris une fois, ou $1\,c$ est autant que c.

25.

Il est de plus facile de multiplier de semblables produits encore par d'autres nombres; par exemple:

2 fois $3\,a$ fait $6\,a$.
3 fois $4\,b$ fait $12\,b$.
5 fois $7\,x$ fait $35\,x$.

Et ces produits peuvent se multiplier encore par d'autres nombres à volonté.

26.

Quand le nombre par lequel on devroit multiplier, est aussi représenté par une lettre, on la met immédiatement devant l'autre lettre; ainsi quand il s'agit de multiplier b par a, le produit doit s'écrire $a\,b$;

& $p q$ ſera le produit de la multiplication du nombre q par p. Si l'on multiplioit ce $p q$ encore par a, on obtiendroit $a p q$.

27.

Il faut bien remarquer qu'ici l'ordre des lettres jointes enſemble eſt indifférent ; que $a b$ eſt la même choſe que $b a$; car b multiplié par a fait autant que a multiplié par b. Pour comprendre ceci on n'a qu'à prendre pour a & b des nombres connus, comme 3 & 4 ; la choſe ſera claire par elle-même : 3 fois 4 font autant que 4 fois 3.

28.

On n'aura pas de peine à voir, que quand il s'agit de mettre des nombres à la place des lettres jointes enſemble de la maniere qu'on a vu, on ne peut pas les écrire de la même maniere l'un à côté de l'autre. Car ſi l'on vouloit écrire 34 pour 3 fois 4, ce ſeroit mettre 34 & non pas 12. On a donc ſoin, quand il s'agit d'une multiplication de

nombres ordinaires, de les ſéparer par des points : ainſi 3.4 ſignifie 3 fois 4, c'eſt-à-dire 12. De même 1.2 eſt autant que 2 ; & 1.2.3 fait 6. Pareillement 1.2.3.4.56 fait 1344 ; & 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 vaut 3628800, &c.

29.

On peut auſſi conclure de-là ce que ſignifie une quantité de cette forme 5.7.8.$abcd$. Elle montre que 5 doit ſe multiplier par 7, & qu'il faut multiplier ce produit encore par 8 ; enſuite qu'il faut multiplier ce produit des trois nombres, par a, & puis par b & puis par c, & enfin par d. On remarquera de plus qu'on peut écrire à la place de 5.7.8 ſa valeur, laquelle eſt 280 ; car c'eſt ce qui vient, quand on multiplie par 8 le produit de 5 par 7, ou 35.

30.

On aura remarqué que nous avons nommé PRODUITS les formules qui naiſſent de

la multiplication de deux ou plusieurs nombres. Il faut observer aussi qu'on nomme *facteurs* les nombres ou les lettres isolées.

31.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des nombres positifs, & il n'y a pas eu lieu de douter que les produits que nous avons vu se former ne fussent positifs de même : savoir $+a$ par $+b$ doit donner nécessairement $+ab$. Mais il faudra examiner à part ce qui doit provenir de la multiplication de $+a$ par $-b$, & de $-a$ par $-b$.

32.

Commençons par multiplier $-a$ par 3 ou $+3$; or puisque $-a$ peut être considéré comme une dette, il est clair que si l'on prend trois fois cette dette, elle doit aussi devenir trois fois plus grande, & par conséquent le produit cherché est $-3a$. De même s'il s'agit de multiplier $-a$ par $+b$, on obtiendra $-ba$, ou, ce qui

est la même chose, $-ab$. Nous tirons de-là la conséquence, qu'une quantité positive étant multipliée par une quantité négative, le produit est négatif; & nous prenons pour regle, que $+$ par $+$ fait $+$ ou *plus*, & qu'au contraire $+$ par $-$, ou $-$ par $+$ donne $-$ ou *moins*.

33.

Il nous reste à résoudre encore ce cas où $-$ est multiplié par $-$; ou, par exemple, $-a$ par $-b$. Il est évident d'abord que, quant aux lettres, le produit sera ab; mais il est incertain encore si c'est le signe $+$, ou bien le signe $-$ qu'il faut mettre devant ce produit; tout ce qu'on sait, c'est que ce sera ou l'un ou l'autre de ces signes. Or je dis que ce ne peut être le signe $-$; car $-a$ par $+b$ donne $-ab$, & $-a$ par $-b$ ne peut produire le même résultat que $-a$ par $+b$; mais il doit en résulter l'opposé, c'est-à-dire, $+ab$; par conséquent nous avons cette regle : $-$ multiplié

par — fait +, de même que + multiplié par +.

34.

Les regles que nous venons de développer s'expriment plus briévement de la maniere qui suit :

Deux signes égaux ou semblables, multipliés l'un par l'autre, donnent +; deux signes dissemblables, ou contraires, donnent —. Ainsi quand il s'agit de multiplier ensemble ces nombres-ci : $+a$, $-b$, $-c$, $+d$; on a d'abord $+a$ multiplié par $-b$, fait $-ab$; ceci par $-c$, fait $+abc$; & ceci enfin multiplié par $+d$, fait $+abcd$.

35.

Les difficultés à l'égard des signes étant levées, nous n'avons plus qu'à faire voir comment on doit multiplier ensemble des nombres qui sont déjà des produits eux-mêmes. S'il s'agit, par exemple, de multiplier le nombre ab par le nombre cd,

le produit sera $abcd$, & il provient de ce qu'on multiplie d'abord ab par c, & ensuite le résultat de cette multiplication encore par d. Ou bien s'il s'agissoit de multiplier 36 par 12 : puisque 12 est autant que 3 fois 4, on n'auroit qu'à multiplier 36 d'abord par 3, & ensuite le produit 108 encore par 4, pour avoir le produit total de la multiplication de 12 par 36, lequel est par conséquent 432.

36.

Mais si l'on vouloit multiplier $5ab$ par $3cd$, on pourroit à la vérité écrire $3cd\,5ab$; cependant comme il ne s'agit pas ici de l'ordre des nombres à multiplier ensemble, on fera mieux de mettre, comme c'est aussi la coutume, les nombres ordinaires devant les lettres, & d'exprimer le produit de cette maniere : $5.3abcd$, ou $15abcd$; parce que 5 fois 3 est autant que 15.

De même si l'on avoit à multiplier $12pqr$ par $7xy$, on obtiendroit $12.7pqrxy$, ou $84pqrxy$.

CHAPITRE IV.

De la nature des Nombres entiers, eu égard à leurs facteurs.

37.

NOUS avons remarqué qu'un produit tire son origine de la multiplication de deux ou de plusieurs nombres les uns par les autres, & qu'on nomme ces nombres des *facteurs*.

Ainsi ce sont les nombres a, b, c, d, qui sont les facteurs du produit $abcd$.

38.

Si l'on considere donc tous les nombres entiers en tant qu'ils peuvent provenir de la multiplication de deux ou de plusieurs nombres entr'eux, on trouvera bientôt que quelques-uns ne sauroient résulter d'une pareille multiplication, & n'ont par conséquent point de facteurs, tandis que d'autres

peuvent être les produits de deux ou de plusieurs nombres multipliés ensemble, & peuvent par conséquent avoir deux ou plusieurs facteurs. C'est ainsi que :

4 est autant que 2.2; que 6 est autant que 2.3; que 8 est autant que 2.2.2; ou 27 autant que 3.3.3; & 10 autant que 2.5, &c.

39.

Mais d'un autre côté les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, &c. ne peuvent être représentés de la même façon par des facteurs, à moins qu'on ne voulût employer pour cet effet l'unité, & représenter 2, par exemple, par 1.2. Or les nombres qui sont multipliés par 1, restant les mêmes, on n'a pas jugé à propos de compter l'unité parmi les facteurs.

Tous ces nombres donc, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, &c. qui ne peuvent pas s'indiquer par des facteurs, ont été nommés *nombres simples*, ou *nombres premiers*; au lieu que

les autres, comme 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, &c. qui peuvent être repréſentés par des facteurs, s'appellent des *nombres composés*.

40.

Les nombres *ſimples* ou *premiers* méritent donc une attention particuliere, par la raiſon qu'ils ne proviennent pas de la multiplication de deux ou de pluſieurs nombres. Il eſt ſur-tout digne de remarque, que ſi l'on écrit ces nombres dans leur ordre naturel comme ils ſe ſuivent,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, &c. (*)

(*) On trouve tous les nombres premiers depuis 1 juſqu'à 100000 dans les tables de Diviſeur, dont je parlerai à l'art. 720 de la quatrieme ſection. Mais on a de plus des tables particulieres des nombres premiers qui vont depuis 1 juſqu'à 101000, & qui ont été publiées à Halle par M. *Kruger*, dans un Ouvrage Allemand intitulé *Penſées ſur l'Algebre*; M. *Kruger* les avoit eues en manuſcrit de celui qui les avoit calculées, & qui ſe nommoit *Pierre Jaeger*. M. *Lambert* a continué ces tables juſqu'à 102000, & les a redonnées dans ſes Supplémens

on n'y remarque point d'ordre régulier; leurs augmentations ſont tantôt plus grandes, tantôt moindres; & juſqu'à préſent

aux Tables Logarithmiques & Trigonométriques, imprimées à Berlin en 1770, Ouvrage qui contient auſſi pluſieurs autres tables qui peuvent être d'une grande utilité dans les différentes parties des Mathématiques, & des éclairciſſemens qu'il ſeroit trop long de rapporter ici.

L'Académie Royale des Sciences de Paris poſſede des tables de nombres premiers, qui lui ont été préſentées par le P. *Mercaſtel* de l'Oratoire, & par M. *du Tour*; mais elles n'ont pas été publiées: il en eſt parlé dans le tome V des Mémoires étrangers préſentés à l'Académie, à l'occaſion d'un Mémoire de M. *Rallier des Ourmes*, Conſeiller d'Honneur au Préſidial de Rennes, qui ſe trouve dans ce volume, & l'Auteur y expoſe une méthode facile de trouver les nombres premiers.

On trouve dans le même volume un autre Mémoire de M. *Rallier des Ourmes*, qu'il a intitulé *Méthode nouvelle de diviſion, quand le dividende eſt multiple du diviſeur, & ſe peut par conſéquent diviſer ſans reſte, & d'extraction de racines quand la puiſſance eſt parfaite.* Cette méthode plus curieuſe à la vérité qu'utile, n'a preſque rien de commun avec la méthode ordinaire; elle eſt très-facile & elle a cette ſingularité, que pourvu qu'on connoiſſe autant de chiffres ſur la droite du dividende ou de la puiſſance, que le quotient ou la racine doivent avoir de chiffres, on peut ſe paſſer des chiffres qui les précedent,

on n'a pu découvrir ſi elles ſe font ſuivant une certaine loi ou non.

41.

Les nombres compoſés, qui peuvent être repréſentés par des facteurs, proviennent tous des nombres premiers ſuſdits, c'eſt-à-dire que tous leurs facteurs ſont des nombres premiers. Car ſi l'on trouve un facteur qui ne ſoit pas un nombre premier, on peut toujours le décompoſer & le repréſenter par deux ou pluſieurs nombres premiers. Quand on a indiqué, par exemple, le nombre 30 par 5.6, on voit que 6 n'étant pas un nombre premier, mais valant 2.3, on auroit pu indiquer 30 par 5.2.3, ou par 2.3.5; c'eſt-à-dire, par des facteurs qui ſont tous des nombres premiers.

& obtenir de même le quotient. M. *Rallier des Ourmes* s'eſt ouvert cette nouvelle route au moyen de quelques réflexions ſur les nombres qui terminent les expreſſions numériques des produits ou des puiſſances, une eſpece de nombres que j'ai remarqués auſſi dans d'autres occaſions qu'il étoit utile de conſidérer.

42.

Si l'on réfléchit maintenant ſur ces nombres compoſés réſolubles en nombres premiers, on y remarquera une grande différence; on verra que les uns n'ont que deux de ces facteurs, que d'autres en ont trois, & que d'autres encore en ont un plus grand nombre. Nous avons déjà vu, par exemple, que

4 eſt autant que 2.2,	6 autant que 2.3,
8 — — — 2.2.2,	9 — — — — 3.3,
10 — — — — 2.5,	12 — — — 2.3.2,
14 — — — — 2.7,	15 — — — — 3.5,
16 — — — 2.2.2.2.	& ainſi de ſuite.

43.

On conclura aiſément de-là comment on doit déterminer les facteurs ſimples d'un nombre quelconque.

Soit propoſé pour exemple le nombre 360, on le repréſentera d'abord par 2.180. Or 180 eſt autant que 2.90, &

90 — — — 2.45, &
45 — — — 3.15, & enfin
15 — — — 3.5.

Par conséquent le nombre 360 peut être représenté par les facteurs simples que voici :

2.2.2.3.3.5 ,

puisque tous ces nombres multipliés ensemble produisent 360 (*).

44.

Nous voyons donc par tout cela, que les nombres premiers ne peuvent pas être divisés par d'autres nombres, & que d'un autre côté on trouve les facteurs simples des nombres composés, le plus commodément & le plus surement, en cherchant les nombres simples, ou premiers, par lesquels ces nombres composés sont divisibles. Mais on a besoin pour cela de la *division ;* nous allons donc expliquer, dans le chapitre suivant, les regles de cette opération.

(*) On trouve à la fin d'une Arithmétique Allemande de *Poëtius*, publiée à Leipsick en 1728, une table où tous les nombres depuis 1 jusqu'à 10000 sont représentés de cette maniere par leurs facteurs simples.

CHAPITRE V.

De la division des Quantités simples.

45.

QUAND il s'agit de décomposer un nombre en deux, trois ou plusieurs parties égales, on le fait par le moyen de la *division*, laquelle nous apprend à déterminer la grandeur d'une de ces parties. Quand on veut, par exemple, décomposer le nombre 12 en trois parties égales, on trouve par la division que chacune de ces parties est égale à 4.

Voici quelques expressions dont on se sert dans cette opération. Le nombre qu'on doit décomposer ou diviser, s'appelle le *dividende ;* le nombre des parties égales qu'on cherche se nomme le *diviseur ;* la grandeur d'une de ces parties, déterminée

par la diviſion, s'appelle le *quotient ;* ainſi dans l'exemple cité :

12 eſt le *dividende*,
3 eſt le *diviſeur*, &
4 eſt le *quotient.*

46.

Il s'enſuit de-là, que ſi l'on diviſe un nombre par 2 ou en deux parties égales, il faut qu'une de ces parties, ou le quotient, priſe deux fois, faſſe exactement le nombre propoſé ; & pareillement que ſi l'on a un nombre à diviſer par 3, le quotient pris trois fois doit redonner le même nombre. Il faut en général que la multiplication du quotient par le diviſeur reproduiſe toujours le dividende.

47.

C'eſt auſſi pourquoi on preſcrit pour la diviſion la regle, de chercher un nombre ou quotient tel, qu'étant multiplié par le diviſeur, il en réſulte préciſément le dividende.

dende. Par exemple, s'il s'agit de diviſer 35 par 5, on cherche un nombre qui, multiplié par 5, produiſe 35. Or ce nombre eſt 7, puiſque cinq fois 7 fait 35. La façon de parler dont on fait uſage dans ce raiſonnement, eſt celle-ci : 5 en 35 j'ai 7 fois ; & 5 fois 7 font 35.

48.

On ſe repréſente donc le dividende comme un produit, duquel un des facteurs eſt égal au diviſeur, l'autre facteur indiquant enſuite le quotient. Ainſi en ſuppoſant qu'on ait 63 à diviſer par 7, on cherchera un produit tel, qu'en prenant 7 pour un de ſes facteurs, l'autre facteur multiplié par celui-ci donne exactement 63. Or 7.9 eſt un tel produit, & par conſéquent 9 eſt le quotient qu'on obtient en diviſant 63 par 7.

49.

S'il eſt queſtion à préſent de diviſer en général un nombre ab par a, il eſt évident

que le quotient ſera b; parce que a multiplié par b redonne le dividende ab. Il eſt clair auſſi que ſi l'on avoit à diviſer ab par b, le quotient ſeroit a.

Ainſi en général dans tous les exemples de diviſion qu'on peut avoir faits, ſi l'on diviſe le dividende par le quotient, on obtiendra de nouveau le diviſeur : de même que 24 diviſé par 4 donne 6, 24 diviſé par 6 donnera 4.

50.

Comme tout ſe réduit à repréſenter le dividende par deux facteurs, dont l'un ſoit égal au diviſeur, l'autre au quotient, on comprendra facilement les exemples qui ſuivent. Je dis d'abord que le dividende abc, diviſé par a, donne bc; car a, multiplié par bc, fait abc; pareillement abc, étant diviſé par b, on aura ac; & abc, diviſé par ac, donne b. Je dis auſſi que $12\,mn$, diviſé par $3\,m$, fait $4\,n$; car $3\,m$, multiplié par $4\,n$, fait $12\,mn$. Mais ſi ce

même nombre $12\,mn$ avoit dû être diviſé par 12, on auroit obtenu le quotient mn.

51.

Puiſque tout nombre a peut être exprimé par $1\,a$ ou *un* a, il eſt évident que ſi l'on avoit à diviſer a ou $1\,a$ par 1, le quotient ſeroit le même nombre a. Mais au contraire, ſi le même nombre a ou $1\,a$ doit ſe diviſer par a, le quotient ſera 1.

52.

Il n'arrive pas toujours qu'on peut repréſenter le dividende comme le produit de deux facteurs, dont l'un ſoit égal au diviſeur, & la diviſion alors ne peut pas ſe faire de la maniere que nous avons dit.

Quand on a, par exemple, 24 à diviſer par 7, on voit d'abord que le nombre 7 n'eſt pas un facteur de 24; car $7 \cdot 3$ ne fait que 21, & par conſéquent trop peu, & $7 \cdot 4$ fait 28, qui eſt déjà plus grand que 24. Mais on voit du moins par-là que le quotient

doit être plus grand que 3, & plus petit que 4. Afin donc de le déterminer exactement, on emploie une autre eſpece de nombres, qu'on nomme les *fractions*, & de laquelle nous traiterons dans un des chapitres ſuivans.

53.

Avant qu'on paſſe à l'uſage des fractions, on a coutume de ſe contenter du nombre entier qui approche le plus du quotient véritable, mais en faiſant attention au *réſidu* qui reſte; ainſi l'on dit, 7 en 24 j'ai 3 fois, & le réſidu eſt 3, parce que 3 fois 7 ne fait que 21, & par conſéquent 3 de moins que 24. On conſidérera de la même maniere les exemples ſuivans:

6 | 34 | 5		c'eſt-à-dire que le diviſeur eſt	6,
30		que le dividende eſt	34,
4		que le quotient eſt	5,
		& que le réſidu eſt	4,

9 | 41 | 4	ici le diviſeur eſt	9,
36	le dividende eſt	41,
5	le quotient eſt	4,
	& le réſidu eſt	5.

Il faut obſerver la regle ſuivante dans les exemples où il reſte un réſidu.

54.

Quand on multiplie le diviſeur par le quotient, & qu'au produit l'on ajoute le réſidu, il faut qu'on obtienne le dividende; c'eſt la maniere de vérifier la diviſion, & de voir ſi l'on a bien calculé ou non. C'eſt ainſi que dans le premier des deux derniers exemples, ſi l'on multiplie 6 par 5, & qu'au produit 30 on ajoute le réſidu 4, il vient 34 ou le dividende.

De même dans le dernier exemple, ſi l'on multiplie le diviſeur 9 par le quotient 4, & qu'au produit 36 on ajoute le réſidu 5, on obtient le dividende 41.

55.

Il eſt enfin néceſſaire auſſi de faire remarquer ici à l'égard des ſignes $+$ *plus*, & $-$ *moins*, que ſi l'on diviſe $+ab$ par $+a$, le quotient ſera $+b$, ce qui eſt évident.

Mais que s'il s'agit de diviſer $+ab$ par $-a$, le quotient ſera $-b$; parce que $-a$ multiplié par $-b$ fait $+ab$. Enſuite:

Que ſi le dividende eſt $-ab$, & qu'il s'agiſſe de le diviſer par le diviſeur $+a$, le quotient ſera $-b$; parce que c'eſt $-b$ qui, multiplié par $+a$, fait $-ab$. Enfin, que s'il eſt queſtion de diviſer le dividende $-ab$ par le diviſeur $-a$, le quotient ſera $+b$; parce que le dividende $-ab$ eſt le produit de $-a$ par $+b$.

56.

La diviſion admet donc quant aux ſignes $+$ & $-$ les mêmes regles que nous avons

vu avoir lieu pour la multiplication; à ſavoir:

$+$ par $+$ fait $+$: $+$ par $-$ fait $-$:
$-$ par $+$ fait $-$: $-$ par $-$ fait $+$;

ou en peu de mots, les mêmes ſignes donnent *plus*, les ſignes contraires donnent *moins*.

57.

Ainſi quand on diviſe $18\,pq$ par $-3p$, le quotient eſt $-6q$.

De plus: $-30\,xy$ diviſé par $+6y$ donne $-5x$
& $-54\,abc$ diviſé par $-9b$ donne $+6\,ac$;

car, dans ce dernier exemple, $-9b$ multiplié par $+6\,ac$ fait $-6.9\,abc$, ou $-54\,abc$; mais nous croyons à préſent en avoir aſſez dit ſur la diviſion en quantités ſimples; nous ne tarderons donc pas à paſſer à l'explication des fractions, après avoir ajouté encore quelques remarques ſur la nature des nombres, eu égard à leurs diviſeurs.

CHAPITRE VI.

Des propriétés des Nombres entiers par rapport à leurs diviſeurs.

58.

COMME nous avons vu que quelques nombres ſont diviſibles par de certains diviſeurs, pendant que d'autres ne le ſont pas, il eſt néceſſaire pour parvenir à une connoiſſance plus particuliere des nombres, de bien faire attention à cette différence, tant en diſtinguant les nombres diviſibles par des diviſeurs de ceux qui ne le ſont pas, qu'en conſidérant le réſidu qui reſte dans la diviſion de ces derniers. Pour cet effet examinons les diviſeurs :

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c.

59.

Soit d'abord le diviſeur 2 ; les nombres qui peuvent être diviſés par celui-là ſont :
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, &c.

leſquels, comme on voit, croiſſent toujours de deux unités. On appelle ces nombres, quelque loin qu'ils puiſſent ſe continuer, des *nombres pairs.*

Mais il eſt d'autres nombres ; à ſavoir :
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, &c.
qui ſont toujours d'une unité plus petits ou plus grands que ceux-là, & qu'on ne peut diviſer par 2, ſans qu'il reſte le réſidu 1 ; on nomme ceux-ci les *nombres impairs.*

Les nombres pairs ſont tous compris dans la formule générale $2a$; car on les obtient tous en mettant ſucceſſivement à la place de a les nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. & de-là il s'enſuit que les nombres impairs ſont tous compris dans la formule $2a + 1$, parce que $2a + 1$ eſt d'une unité plus grand que le nombre pair $2a$.

60.

En ſecond lieu, ſoit pour diviſeur le nombre 3 : les nombres diviſibles par ce diviſeur ſont,
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, & ainſi de ſuite.

Et ces nombres peuvent ſe repréſenter par la formule $3a$; car $3a$ diviſé par 3 donne le quotient a ſans réſidu. Tous les autres nombres au contraire qu'on voudroit diviſer par 3, donneront 1 ou 2 de réſidu, & ſont par conſéquent de deux ſortes. Ceux qui après la diviſion laiſſent le reſte 1, ſont:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c.

& ſont contenus dans la formule $3a+1$; mais l'autre eſpece, où les nombres qui donnent le reſte 2, ſont:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, &c.

& la formule qui les exprime généralement eſt $3a+2$; de façon donc que tous les nombres peuvent s'indiquer ou par $3a$, ou par $3a+1$, ou par $3a+2$.

61.

Suppoſons maintenant que 4 ſoit le diviſeur en queſtion, les nombres qu'il diviſe ſont:

4, 8, 12, 16, 20, 24, &c.

leſquels augmentent réguliérement par 4,

& ſont contenus dans la formule $4a$. Les autres nombres, c'eſt-à-dire ceux qui ne ſont pas diviſibles par 4, peuvent laiſſer le réſidu 1, ou être de 1 plus grands que ceux-là: comme

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, &c.

& être par conſéquent compris dans la formule $4a+1$:

ou bien ils peuvent donner le réſidu 2; comme

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, &c.

& s'exprimer par la formule $4a+2$; ou enfin ils donneront le reſte 3; comme

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, &c.

& seront indiqués par la formule $4a+3$.

Tous les nombres entiers poſſibles ſont donc contenus dans l'une ou l'autre de ces quatre expreſſions:

$4a$, $4a+1$, $4a+2$, $4a+3$.

62.

Il en eſt à peu près de même quand le diviſeur eſt 5 ; car tous les nombres diviſibles par celui-là ſont contenus dans la formule $5a$, & ceux qu'on ne peut diviſer par 5, reviennent à une des formules qui ſuivent :

$$5a+1,\ 5a+2,\ 5a+3,\ 5a+4;$$

& c'eſt de la même maniere qu'on pourra continuer & conſidérer de plus grands diviſeurs.

63.

Il eſt à propos de ſe rappeller ici ce qui a été dit plus haut de la réſolution des nombres en leurs facteurs ſimples ; car tout nombre, parmi les facteurs duquel ſe trouve

2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 7,

ou un autre nombre quelconque, ſera diviſible par ces nombres. Par exemple :

60 étant autant que 2.2.3.5,

il eſt clair que 60 eſt diviſible par 2, & par 3 & par 5 (*).

(*) Il y a quelques nombres qu'on voit aſſez facilement être diviſeurs ou non d'un nombre propoſé.

Un nombre propoſé eſt diviſible par 2, ſi le dernier chiffre eſt pair ; il eſt diviſible par 4, ſi les deux derniers chiffres ſont diviſibles par 4 ; il eſt diviſible par 8, ſi les trois derniers chiffres ſont diviſibles par 8 ; & en général il eſt diviſible par 2^n, ſi les n derniers chiffres ſont diviſibles par 2^n.

Un nombre eſt diviſible par 3, ſi la ſomme des chiffres eſt diviſible par 3 ; il ſe diviſe par 6, ſi outre cela le dernier chiffre eſt pair ; il eſt diviſible par 9, ſi la ſomme des chiffres peut ſe diviſer par 9.

Tout nombre dont le dernier chiffre eſt 0 ou 5, eſt diviſible par 5.

Un nombre eſt diviſible par 11, lorſque la ſomme du premier, du troiſieme, du cinquieme, &c. chiffre eſt égale à la ſomme du ſecond, du quatrieme, du ſixieme, &c. chiffre.

Il eſt aſſez facile de ſe rendre raiſon de ces regles, & de les étendre aux produits des diviſeurs que nous venons de conſidérer ; on peut imaginer auſſi des regles pour quelques autres nombres, mais l'application en ſeroit ordinairement plus longue que l'eſſai de la diviſion réelle.

Je dis, par exemple, que le nombre 53704689213 eſt diviſible par 7, parce que je trouve que la ſomme des chiffres du nombre 64004245433 eſt diviſible par 7 ; c'eſt

64.

De plus, comme la formule générale *abcd* eſt non-ſeulement diviſible par *a*, & *b*, & *c*, & *d*, mais auſſi par

ab, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*, & par

abc, *abd*, *acd*, *bcd*, & enfin par

abcd, c'eſt-à-dire, par ſa propre valeur; il s'enſuit que 60, ou 2.2.3.5, peut ſe diviſer non-ſeulement par ces nombres ſimples, mais auſſi par ceux qui ſont compoſés de deux nombres ſimples, c'eſt-à-dire, par 4, 6, 10, 15.

Et pareillement par ceux qui ſont compoſés de trois facteurs ſimples, c'eſt à-dire par 12, 20, 30, & enfin auſſi, par 60 même.

65.

Quand on aura donc repréſenté un nom-

...e ſecond nombre eſt formé, ſuivant une regle aſſez ..., des réſidus qu'on trouve en diviſant par 7 les ...es 10, 100, 1000, &c. 20, 200, 2000, &c. juſ-...0, 600, 6000, &c.

bre pris à volonté, par ſes facteurs ſimples, il ſera très-facile d'indiquer tous les nombres par leſquels celui-là pourra être diviſé. Car on n'a qu'à prendre d'abord les facteurs ſimples un à un, & enſuite les multiplier enſemble deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. juſqu'à ce qu'on arrive au nombre propoſé.

66.

Il faut remarquer ici avant toutes choſes, que tout nombre eſt diviſible par 1; & de même que tout nombre eſt diviſible par lui-même; de ſorte donc que chaque nombre a au moins deux facteurs ou diviſeurs; à ſavoir ce nombre même & l'unité; mais tout nombre qui n'a pas d'autre diviſeur que ces deux, appartient à la claſſe des nombres que nous avons nommés plus haut *nombres ſimples* ou *premiers*.

Hors ceux-là tous les autres nombres compoſés ont, outre l'unité & ſoi-même, d'autres diviſeurs, comme on peut le voir

par la table suivante, dans laquelle on a mis sous chaque nombre tous ses diviseurs (*).

TABLE.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17	2	19	2
			4		3		4	9	5		3		7	5	4		3		4
					6		8		10		4		14	15	8		6		5
											6				16		9		10
											12						18		20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.		p.				p.		p.	

67.

Enfin l'on doit observer que o, ou *zéro*, peut être regardé comme un nombre qui

(*) On a une pareille table pour tous les diviseurs des nombres naturels, depuis 1 jusqu'à 10000, qui a été publiée à Leyde en 1767 par M. *Henri Anjema*. On a encore une autre table de diviseurs, qui va jusqu'à 100000; mais dans laquelle il n'y a que le plus petit diviseur de chaque nombre. Elle se trouve dans le Dictionnaire Anglois de *Harris*, dans le Dictionnaire Encyclopédique & dans le Recueil de M. *Lambert*, que nous avons déjà cité à l'article 40. Elle est même continuée dans ce dernier Ouvrage jusqu'à 102000.

a la

a la propriété d'être divisible par tous les nombres possibles; parce que par quelque nombre *a* que l'on ait à diviser o, le quotient se trouve toujours être o; car il faut bien remarquer que la multiplication d'un nombre quelconque par *zéro* ne produit rien, & qu'ainsi o fois *a*, ou o*a*, est o.

CHAPITRE VII.

Des Fractions en général.

68.

QUAND un nombre, comme 7, par exemple, est dit n'être pas divisible par un autre nombre, supposons par 3, cela veut seulement dire que le quotient ne peut pas être exprimé par un nombre entier, & il ne faut point du tout croire qu'on ne puisse pas se faire une idée de ce quotient.

On n'a qu'à s'imaginer une ligne longue de 7 pieds, personne ne doutera qu'il ne

ſoit poſſible de diviſer cette ligne en 3 parties égales, & de ſe faire une idée de la longueur d'une de ces parties.

69.

Puis donc qu'on peut ſe faire une idée nette du quotient qu'on obtient dans des cas ſemblables, quoique ce quotient ne ſoit pas un nombre entier, on ſe trouve conduit par là à conſidérer une eſpece particuliere de nombres, qu'on nomme *fractions* ou *nombres rompus*.

L'exemple allégué en fournit une preuve. S'il s'agit de diviſer 7 par 3, on ſe repréſente facilement le quotient qui doit en réſulter, & on l'exprime par $\frac{7}{3}$; en mettant le diviſeur ſous le dividende, & en ſéparant les deux nombres par un trait.

70.

Ainſi quand en général le nombre a doit être diviſé par le nombre b, on indique le quotient par $\frac{a}{b}$, & on appelle cette façon

de s'exprimer, une *fraction*. On ne peut donc donner mieux une idée d'une fraction $\frac{a}{b}$, qu'en diſant qu'on indique de cette maniere le quotient qui provient de la diviſion du nombre ſupérieur par le nombre inférieur. Il faut ſe ſouvenir auſſi que dans toutes ces fractions le nombre inférieur ſe nomme le *dénominateur*, & que celui qui eſt au-deſſus du trait s'appelle le *numérateur*.

71.

Dans la fraction citée, $\frac{7}{3}$, qu'on prononce ſept tiers, 7 eſt donc le numérateur, & 3 eſt le dénominateur.

Il faut de même prononcer

$\frac{2}{3}$, deux tiers; $\frac{3}{4}$, trois quarts;
$\frac{3}{8}$, trois huitiemes; $\frac{12}{100}$, douze centiemes;

mais $\frac{1}{2}$ ſe prononce un demi, & non pas un deuxieme.

72.

Afin de parvenir à une connoiſſance plus parfaite de la nature des fractions, nous

commencerons par considérer le cas où le numérateur est égal au dénominateur, comme dans $\frac{a}{a}$. Or puisqu'on indique par là le quotient qu'on obtient, quand on divise a par a, il est clair que ce quotient est exactement l'unité, & que par conséquent cette fraction $\frac{a}{a}$ vaut autant que 1, ou un entier; il s'ensuit de plus que toutes les fractions qui suivent:

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, &c.

sont toutes égales en valeur l'une à l'autre, valant chacune 1, ou un entier.

73.

Nous venons de voir qu'une fraction qui a le numérateur égal au dénominateur, vaut l'unité. Il faut donc que toutes les fractions dont les numérateurs sont plus petits que les dénominateurs, ayent une valeur moindre que l'unité. Car si j'ai un nombre à diviser par un autre qui est plus grand, il me vient nécessairement moins que 1: une ligne, par exemple, de deux pieds de long, devant être coupée en trois parties, une seule de ces parties sera sans contredit plus courte qu'un pied; il est donc évident que $\frac{2}{3}$ est plus petit que 1, & cela par la même raison que le numérateur 2 est plus petit que le dénominateur 3.

74.

Si le numérateur est au contraire plus grand que le dénominateur, la valeur de la fraction est plus grande que l'unité. C'est ainsi que $\frac{3}{2}$ vaut plus que 1; car $\frac{3}{2}$ est autant que $\frac{2}{2}$ & encore $\frac{1}{2}$. Or $\frac{2}{2}$ est autant que 1, par conséquent $\frac{3}{2}$ vaut $1\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, un entier & encore un demi. De même $\frac{4}{3}$ valent $1\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$ valent $1\frac{2}{3}$, & $\frac{7}{3}$ valent $2\frac{1}{3}$. Et en général il suffit dans ces cas de diviser le nombre supérieur par l'inférieur, & de joindre au quotient une fraction qui ait le résidu pour numérateur, & le diviseur pour dénominateur. Si la fraction donnée étoit, par exemple, $\frac{43}{12}$, on auroit au quotient 3, & 7 pour résidu; d'où l'on

concluroit que $\frac{43}{12}$ eſt la même choſe que $3\frac{7}{12}$.

75.

On voit par-là comment les fractions, dont les numérateurs ſurpaſſent les dénominateurs, ſe réſolvent en deux membres, l'un deſquels eſt un nombre entier, & l'autre un nombre rompu, dont le numérateur eſt plus petit que le dénominateur. On nomme ces fractions, qui contiennent un ou pluſieurs entiers, *des fractions impropres* par oppoſition aux fractions réelles ou proprement dites, qui ayant le numérateur plus petit que le dénominateur, ſont moindres que l'unité ou qu'un entier.

76.

On a coutume de ſe faire une idée de la nature des fractions encore d'une autre maniere, qui éclaircit aſſez bien la choſe. Si l'on conſidere, par exemple, la fraction $\frac{3}{4}$, il eſt évident qu'elle eſt trois fois plus

grande que $\frac{1}{4}$. Or cette fraction $\frac{1}{4}$ ſignifie que ſi l'on partage 1 en 4 parties égales, ce ſera-là la valeur d'une de ces parties; il eſt donc clair qu'en prenant enſemble 3 de ces parties, on aura la valeur de la fraction $\frac{3}{4}$.

On peut conſidérer de la même maniere toute autre fraction, par exemple, $\frac{7}{12}$; ſi l'on partage l'unité en 12 parties égales, 7 de ces parties équivaudront à la fraction propoſée.

77.

C'eſt auſſi à cette maniere de repréſenter les fractions, que les dénominations ſuſdites de numérateur & de dénominateur doivent leur origine. Car, comme dans la fraction précédente $\frac{7}{12}$, le nombre qui eſt ſous le trait indique que c'eſt en 12 parties que l'unité doit ſe diviſer; par conſéquent, comme il déſigne ou *nomme* ces parties, on ne l'a pas nommé ſans raiſon *le dénominateur*.

De plus, comme le nombre supérieur, savoir 7, indique que pour avoir la valeur de la fraction il faut prendre ou rassembler 7 de ces parties, & que par conséquent il les compte pour ainsi dire, on a jugé à propos de nommer ce nombre qui est au-dessus du trait, *le numérateur*.

78.

Puisqu'il est aisé de comprendre ce que c'est que $\frac{3}{4}$, quand on sait ce que signifie $\frac{1}{4}$, nous pouvons considérer les fractions dont le numérateur est l'unité, comme faisant le fondement de toutes les autres. Telles sont les fractions

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, &c.

& il faut remarquer que ces fractions vont toujours en diminuant; car plus vous divisez un entier, ou plus le nombre des parties que vous en faites est grand, plus au contraire chacune de ces parties devient petite. C'est ainsi que $\frac{1}{100}$ est plus petit que $\frac{1}{10}$; que $\frac{1}{1000}$ plus petit que $\frac{1}{100}$; & $\frac{1}{10000}$ plus petit que $\frac{1}{1000}$.

79.

On a vu que plus on augmente le dénominateur de pareilles fractions, & plus leurs valeurs deviennent petites. On pourroit donc demander s'il ne seroit pas possible de faire ce dénominateur si grand, que la fraction se réduisit à rien? Nous répondrons que non; car en combien de parties, innombrables même, que vous divisiez l'unité; par exemple, la longueur d'un pied, ces parties ne laisseront pas de conserver une certaine grandeur, & ne seront par conséquent jamais absolument rien.

80.

Il est vrai que si l'on divise la longueur d'un pied en 1000 parties, par exemple; ces parties ne tomberont plus facilement sous nos sens. Mais regardez-les par un bon microscope, elles paroîtront assez grandes pour pouvoir être divisées encore en 100 parties & davantage.

Il ne s'agit cependant pas du tout ici de ce qu'il dépend de nous de faire, ou de ce que nous ſommes capables d'exécuter réellement, & de ce que nos yeux peuvent appercevoir; il eſt queſtion plutôt de ce qui eſt poſſible en ſoi-même. Or il eſt certain dans ce ſens, que quelque grand qu'on veuille ſuppoſer le dénominateur, la fraction pourtant ne s'évanouira jamais entiérement, ou ne deviendra jamais tout-à-fait égale à o.

81.

On n'arrive donc jamais entiérement à rien, quelque grand qu'on faſſe le dénominateur; & ces fractions conſervant toujours encore une certaine grandeur, on peut continuer, ſans jamais ceſſer, la ſuite de fractions de l'article 78. Cette propriété a fait dire qu'il faudroit que le dénominateur fût *infini* ou infiniment grand, pour que la fraction ſe réduisît enfin à o, ou à rien; & ce mot d'*infini* ſignifie en effet

ici qu'on ne parviendroit jamais à une fin avec la ſuite deſdites fractions.

82.

On ſe ſert pour repréſenter cette idée, qui eſt très-fondée, du ſigne ∞, lequel par conſéquent ſignifie un nombre infiniment grand; & on peut donc dire que cette fraction $\frac{1}{\infty}$ eſt un rien réel, par la raiſon même qu'une fraction ne ſauroit ſe réduire à rien, auſſi long-temps que le dénominateur n'a pas été augmenté à l'infini.

83.

Il eſt d'autant plus néceſſaire de faire attention à cette idée de l'infini, qu'elle eſt déduite des premiers fondemens de nos connoiſſances, & qu'elle ſera de la plus grande importance dans ce qui ſuivra.

Nous pouvons ici déjà en tirer des conſéquences auſſi belles que dignes de notre attention.

La fraction $\frac{1}{\infty}$ indique le quotient de la

division du dividende 1 par le diviseur ∞: Or nous savons qu'en divisant le dividende 1 par le quotient $\frac{1}{\infty}$, qui est, comme nous avons vu, autant que 0, on retrouve le diviseur ∞ : voici donc une nouvelle notion de l'infini que nous acquérons ; nous apprenons qu'il provient de la division de 1 par 0 ; & l'on est par conséquent fondé à dire, que 1 divisé par 0 indique un nombre infiniment grand ou ∞.

84.

Il est nécessaire encore ici de dissiper l'erreur assez commune de ceux qui prétendent qu'un infiniment grand n'est pas susceptible d'augmentation.

Cette opinion ne sauroit subsister avec les principes solides que nous venons d'établir ; car $\frac{1}{0}$ signifiant un nombre infiniment grand, & $\frac{2}{0}$ étant incontestablement le double de $\frac{1}{0}$, il est clair qu'un nombre, quoique infiniment grand, peut devenir encore deux ou plusieurs fois plus grand.

CHAPITRE VIII.

Des propriétés des Fractions.

85.

Nous avons vu plus haut que chacune des fractions,

$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{5},\ \frac{6}{6},\ \frac{7}{7},\ \frac{8}{8},\ \&c.$$

fait un entier, & que par conséquent elles sont toutes égales entr'elles. La même égalité regne dans les fractions qui suivent,

$$\frac{2}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{6}{3},\ \frac{8}{4},\ \frac{10}{5},\ \frac{12}{6},\ \&c.$$

chacune d'elles faisant deux entiers ; car le numérateur de chacune divisé par son dénominateur, donne 2. De même toutes ces fractions

$$\frac{3}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{9}{3},\ \frac{12}{4},\ \frac{15}{5},\ \frac{18}{6},\ \&c.$$

sont égales entr'elles, puisqu'elles ont 3 pour valeur commune.

86.

On peut pareillement représenter la valeur d'une fraction quelconque, d'une infinité de manieres. Car si l'on multiplie tant le numérateur que le dénominateur d'une fraction par un même nombre, que l'on peut prendre à volonté, cette fraction n'en conservera pas moins la même valeur. C'est par cette raison que toutes ces fractions

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \frac{10}{20}$, &c.

sont égales entr'elles, chacune valant $\frac{1}{2}$. De même

$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \frac{8}{24}, \frac{9}{27}, \frac{10}{30}$, &c.

sont des fractions égales, & dont chacune vaut $\frac{1}{3}$. Les fractions

$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}$, &c.

ont pareillement toutes une même valeur; & on peut conclure enfin en général que la fraction $\frac{a}{b}$ peut être représentée par les expressions suivantes, dont chacune équivaut à $\frac{a}{b}$; savoir:

$\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \frac{5a}{5b}, \frac{6a}{6b}$, &c.

87.

Pour s'en convaincre on n'a qu'à écrire pour la valeur de la fraction $\frac{a}{b}$ une certaine lettre c, en entendant par cette lettre c le quotient de la division de a par b; & se rappeller que la multiplication du quotient c par le diviseur b, doit donner le dividende. Car puisque c multiplié par b donne a, il est clair que c multiplié par $2b$ donnera $2a$, que c multiplié par $3b$ donnera $3a$, & qu'ainsi en général c multiplié par mb doit donner ma. Or changeant maintenant ceci en un exemple de division, & divisant le produit ma par mb, l'un des facteurs, il faut que le quotient soit égal à l'autre facteur c; mais ma divisé par mb donne aussi la fraction $\frac{ma}{mb}$, laquelle est par conséquent égale à c; & voilà ce qu'il s'agissoit de prouver: car c ayant été adopté pour la valeur de la fraction $\frac{a}{b}$, il est évident que cette fraction est égale à la fraction $\frac{ma}{mb}$, quelque valeur que l'on donne à m.

88.

Nous avons vu que toute fraction peut être représentée sous une infinité de formes, dont chacune contient la même valeur; & il est indubitable que de toutes ces formes, c'est celle qui sera composée des plus petits nombres, dont on saisira le mieux la signification. Par exemple, on pourroit mettre au lieu de $\frac{2}{3}$ les fractions suivantes,

$$\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \&c.$$

mais il n'est pas douteux que $\frac{2}{3}$ ne soit toujours de toutes ces expressions celle dont il est le plus facile de se faire une idée. Il se présente donc ici la question comment une fraction, comme $\frac{8}{12}$, qui n'est pas exprimée par les plus petits nombres possibles, peut être réduite à sa forme la plus simple ou à *ses moindres termes*, c'est-à-dire dans notre exemple, à $\frac{2}{3}$.

89.

Il sera facile de résoudre cette question, si l'on considere qu'une fraction ne laisse pas

pas de conserver sa valeur, quand on multiplie ses deux termes, ou son numérateur & son dénominateur, par un même nombre. Car de-là il s'ensuit qu'aussi en divisant le numérateur & le dénominateur d'une fraction par un même nombre, cette fraction doit conserver la même valeur. Cela se voit encore plus clairement par le moyen de la formule générale $\frac{ma}{mb}$; car si l'on divise tant le numérateur ma que le dénominateur mb par le nombre m, on obtient la fraction $\frac{a}{b}$, laquelle, comme on l'a prouvé ci-dessus, est égale à $\frac{ma}{mb}$.

90.

Afin donc de réduire une fraction proposée à ses moindres termes, il s'agit de trouver un nombre par lequel tant le numérateur que le dénominateur puisse être divisé. Un nombre de cette espece se nomme un *commun diviseur*, & aussi long-temps qu'on peut indiquer un commun diviseur entre le numérateur & le dénominateur,

il eſt certain que la fraction peut être réduite à une expreſſion plus petite ; mais quand on voit au contraire qu'à l'exception de l'unité aucun autre commun diviſeur ne ſauroit avoir lieu, c'eſt ſigne que la fraction ſe trouve déjà ſous la forme la plus ſimple qu'il eſt poſſible.

91.

Pour rendre ceci plus clair, conſidérons la fraction $\frac{48}{120}$. Nous voyons d'abord que les deux termes ſe diviſent par 2, & qu'il en réſulte la fraction $\frac{24}{60}$. Enſuite qu'on peut de nouveau diviſer par 2, & réduire la fraction à $\frac{12}{30}$; & celle-ci ayant encore 2 pour commun diviſeur, il eſt clair qu'on peut la réduire à $\frac{6}{15}$. Mais à préſent l'on s'apperçoit facilement que le numérateur & le dénominateur ſont encore diviſibles par 3 ; faiſant donc cette diviſion on obtient la fraction $\frac{2}{5}$, laquelle eſt égale à la fraction propoſée, & indique l'expreſſion la plus ſimple à laquelle on puiſſe la réduire ; car 2 & 5 n'ont que le commun

diviſeur 1, lequel ne peut diminuer ces nombres davantage.

92.

Cette propriété qu'ont les fractions, de garder une valeur invariable, ſoit qu'on diviſe ou qu'on multiplie le numérateur & le dénominateur par un même nombre ; cette propriété, dis-je, eſt de la plus grande importance & fait le principe fondamental de tout ce qu'on enſeigne ſur les fractions. On ne peut guere, par exemple, ajouter enſemble deux fractions, ou les ſouſtraire l'une de l'autre, avant que, moyennant cette propriété, on les ait réduites à d'autres formes, c'eſt-à-dire à des expreſſions dont les dénominateurs ſoient égaux. C'eſt de quoi nous parlerons dans le chapitre ſuivant.

93.

Nous finirons celui-ci par la remarque, qu'on peut auſſi repréſenter tous les nombres entiers par des fractions. Par exemple, 6

eſt autant que $\frac{6}{1}$, parce que 6 diviſé par 1 fait 6 ; & on peut de la même maniere exprimer ce nombre 6 par les fractions $\frac{12}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{36}{6}$, & une infinité d'autres qui ont la même valeur.

CHAPITRE IX.

De l'addition & de la ſouſtraction des Fractions.

94.

LORSQUE les fractions ont des dénominateurs égaux, il n'y a aucune difficulté à les ajouter & à les ſouſtraire ; car $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ eſt autant que $\frac{5}{7}$, & $\frac{4}{7} - \frac{2}{7}$ autant que $\frac{2}{7}$. On n'opere dans ce cas, ſoit pour l'addition, ſoit pour la ſouſtraction, que ſur les numérateurs, & on met ſous le trait le dénominateur commun ; ainſi

$$\frac{7}{100} + \frac{9}{100} - \frac{12}{100} - \frac{15}{100} + \frac{20}{100} \text{ fait } \frac{9}{100};$$
$$\frac{24}{50} - \frac{7}{50} - \frac{12}{50} + \frac{31}{50} \text{ fait } \frac{36}{50} \text{ ou } \frac{18}{25};$$
$$\frac{16}{20} - \frac{3}{20} - \frac{11}{20} + \frac{14}{20} \text{ fait } \frac{16}{20} \text{ ou } \frac{4}{5};$$

de même $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ font $\frac{3}{3}$ ou 1, c'eſt-à-dire un entier ; & $\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ font $\frac{0}{4}$, c'eſt-à-dire rien, ou 0.

95.

Mais quand les fractions n'ont pas des dénominateurs égaux, il eſt toujours poſſible de les transformer en d'autres fractions qui ayent un même dénominateur. Par exemple, quand on propoſe d'ajouter enſemble les fractions $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, il faut conſidérer que $\frac{1}{2}$ eſt autant que $\frac{3}{6}$, & que $\frac{1}{3}$ équivaut à $\frac{2}{6}$; nous avons donc à la place des deux fractions propoſées ces deux autres, $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, dont la ſomme fait $\frac{5}{6}$. Si les deux fractions étoient jointes par le ſigne *moins*, comme $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, on auroit $\frac{3}{6} - \frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{6}$.

Autre exemple : Soient les fractions propoſées $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$; puiſque $\frac{3}{4}$ eſt la même choſe que $\frac{6}{8}$, on peut lui ſubſtituer cette valeur & dire $\frac{6}{8} + \frac{5}{8}$ font $\frac{11}{8}$ ou $1\,\frac{3}{8}$.

Suppoſez qu'on demande encore ce que donnent $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ajoutés enſemble, je dis que c'eſt $\frac{7}{12}$; car $\frac{1}{3}$ fait $\frac{4}{12}$, & $\frac{1}{4}$ fait $\frac{3}{12}$.

96.

Il peut arriver qu'on ait un plus grand nombre de fractions à réduire à un même dénominateur; par exemp. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, tout se réduit alors à trouver un nombre qui soit divisible par tous les dénominateurs de ces fractions. 60 est ici le nombre qui a cette propriété, & qui devient par conséquent le dénominateur commun. Nous aurons donc $\frac{30}{60}$ au lieu de $\frac{1}{2}$; $\frac{40}{60}$ au lieu de $\frac{2}{3}$; $\frac{45}{60}$ au lieu de $\frac{3}{4}$; $\frac{48}{60}$ au lieu de $\frac{4}{5}$, & $\frac{50}{60}$ au lieu de $\frac{5}{6}$. S'il s'agit à présent d'ajouter ensemble toutes ces fractions $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$; on ne fait qu'ajouter tous les numérateurs, & on donne à la somme le dénominateur commun 60; c'est-à-dire qu'on aura $\frac{213}{60}$, ou 3 entiers & $\frac{33}{60}$, ou 3 $\frac{11}{20}$.

97.

Tout se réduit ici, nous le répétons, à transformer deux fractions dont les dénominateurs sont inégaux, en deux autres dont les dénominateurs sont égaux. Pour faire donc cette opération d'une maniere générale, soient $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ les fractions proposées. Qu'on multiplie d'abord les deux termes de la premiere par d, on aura la fraction $\frac{ad}{bd}$ égale à $\frac{a}{b}$; qu'on multiplie ensuite les deux termes de la seconde fraction par b, on en aura une valeur équivalente exprimée par $\frac{bc}{bd}$; & voilà les deux dénominateurs devenus égaux. Maintenant si l'on demande quelle est la somme des deux fractions proposées, on peut répondre aussi-tôt que c'est $\frac{ad+bc}{bd}$; & s'il est question de la différence, on dit qu'elle est $\frac{ad-bc}{bd}$. S'il s'agissoit, par exemple, des fractions $\frac{5}{8}$ & $\frac{7}{9}$, on obtiendroit à leur place $\frac{45}{72}$ & $\frac{56}{72}$, dont la somme est $\frac{101}{72}$, & dont la différence est $\frac{11}{72}$.

98.

C'est à cette matiere aussi qu'appartient la question, laquelle de deux fractions proposées est la plus grande ou la plus petite? car, pour y répondre, on n'a qu'à réduire

ces deux fractions au même dénominateur. Prenons pour exemple les deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{7}$; si on les réduit au même dénominateur, la premiere devient $\frac{14}{21}$, & la seconde $\frac{15}{21}$, & il est évident à présent que c'est la seconde, ou $\frac{5}{7}$, qui est la plus grande, & que c'est de $\frac{1}{21}$ qu'elle surpasse la premiere.

Soient proposées encore les deux fractions $\frac{3}{5}$ & $\frac{5}{8}$, on aura à leur place celles-ci, $\frac{24}{40}$ & $\frac{25}{40}$; d'où l'on peut inférer que $\frac{5}{8}$ surpasse $\frac{3}{5}$, mais seulement de $\frac{1}{40}$.

99.

Lorsqu'il est question de soustraire une fraction d'un nombre entier, il suffit de convertir une des unités de ce nombre entier en une fraction qui ait le même dénominateur que celle qu'il faut soustraire, le reste se fait sans difficulté. Qu'il s'agisse, par exemple, de soustraire $\frac{2}{3}$ de 1, on écrira $\frac{3}{3}$ au lieu de 1, & on dira $\frac{2}{3}$ ôté de $\frac{3}{3}$ laisse $\frac{1}{3}$ de reste. De même $\frac{5}{12}$, soustrait de 1, laisse $\frac{7}{12}$.

S'il s'agissoit de soustraire $\frac{3}{4}$ de deux, on écriroit 1 & $\frac{4}{4}$ au lieu de 2, & on verroit d'abord qu'il doit rester après la soustraction $1\frac{1}{4}$.

100.

Il arrive aussi quelquefois qu'ayant ajouté ensemble deux ou plusieurs fractions, on obtient plus d'un entier, c'est-à-dire, un numérateur plus grand que le dénominateur; c'est un cas qui s'est même déjà présenté & auquel il faut faire attention.

Nous avons trouvé, par exemple, à l'article 96 que la somme des cinq fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ & $\frac{5}{6}$ étoit $\frac{213}{60}$, & nous avons fait observer que cette somme signifioit 3 entiers & $\frac{33}{60}$ ou $\frac{11}{20}$. De même $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ ou $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$ font $\frac{17}{12}$ ou $1\frac{5}{12}$. Il n'y a qu'à faire la division réelle du numérateur par le dénominateur, voir combien d'entiers viennent au quotient, & tenir compte du résidu.

On fera de même à peu près pour ajouter ensemble des quantités composées de

nombres entiers & de fractions; on ajoutera d'abord les fractions, & si leur somme fait un ou plusieurs entiers, on les ajoute aux autres entiers. Qu'il soit question, par exemple, d'ajouter $3\frac{1}{2}$ & $2\frac{2}{3}$, on prend d'abord la somme de $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$, ou de $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{6}$. Elle est $\frac{7}{6}$ ou $1\frac{1}{6}$; donc la somme totale est $6\frac{1}{6}$.

CHAPITRE X.

De la multiplication & de la division des Fractions.

101.

LA regle pour la multiplication d'une fraction par un nombre entier, est de ne multiplier par ce nombre que le numérateur, & de ne rien changer au dénominateur; ainsi

2 fois $\frac{1}{2}$ fait $\frac{2}{2}$ ou 1 entier;

2 fois $\frac{1}{3}$ fait $\frac{2}{3}$; &

3 fois $\frac{1}{6}$ fait $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$;

4 fois $\frac{5}{12}$ fait $\frac{20}{12}$ ou $1\frac{8}{12}$ ou $1\frac{2}{3}$.

On peut cependant, au lieu de cette regle, employer aussi celle de diviser le dénominateur par le nombre entier donné; & il est bon de s'en servir, quand cela se peut, parce qu'on abrege par-là le calcul. Qu'il s'agisse, par exemple, de multiplier $\frac{8}{9}$ par 3; si l'on multiplie le numérateur par le nombre entier, on obtient $\frac{24}{9}$, lequel produit se réduit à $\frac{8}{3}$. Mais si l'on ne change rien au numérateur & qu'on divise le dénominateur par le nombre entier, on trouve immédiatement $\frac{8}{3}$ ou $2\frac{2}{3}$ pour le produit cherché. De même $\frac{13}{24}$ multipliés par 6 donnent $\frac{13}{4}$ ou $3\frac{1}{4}$.

102.

En général donc, le produit de la multiplication d'une fraction $\frac{a}{b}$ par c est $\frac{ac}{b}$, & on peut remarquer que quand le nombre entier est précisément égal au dénominateur, le produit doit être égal au numérateur.

En effet

$\frac{1}{2}$ pris 2 fois donne 1;
$\frac{2}{3}$ pris 3 fois donne 2;
$\frac{3}{4}$ pris 4 fois donne 3.

Et en général, si l'on multiplie la fraction $\frac{a}{b}$ par le nombre b, le produit doit être a, comme on l'a déjà fait sentir plus haut; car puisque $\frac{a}{b}$ indique le quotient de la division du dividende a par le diviseur b, & qu'on a démontré que le quotient multiplié par le diviseur doit donner le dividende, il est clair que $\frac{a}{b}$ multiplié par b doit produire a.

103.

Nous avons vu comment on doit multiplier une fraction par un nombre entier, voyons à présent aussi comment il faut diviser une fraction par un nombre entier; cette recherche est nécessaire avant que nous passions à la multiplication des fractions par des fractions. Or il est clair que si j'ai à diviser la fraction $\frac{2}{3}$ par 2, il doit me venir $\frac{1}{3}$; & que le quotient de $\frac{6}{7}$ divisé par 3 est $\frac{2}{7}$. La regle est donc, qu'il faut diviser le numérateur par le nombre entier sans changer le dénominateur. Ainsi:

$\frac{12}{25}$ divisé par 2 donne $\frac{6}{25}$; &
$\frac{12}{25}$ divisé par 3 donne $\frac{4}{25}$; &
$\frac{12}{25}$ divisé par 4 donne $\frac{3}{25}$, &c.

104.

Cette regle peut être pratiquée sans difficulté, pourvu que le numérateur soit divisible par le nombre proposé; mais fort souvent il ne l'est pas; il faut donc observer qu'on peut transformer une fraction en un nombre infini d'autres expressions, & que dans ce nombre il ne peut manquer d'y en avoir de telles, que le numérateur puisse être divisé par le nombre entier donné. S'il s'agissoit, par exemple, de diviser $\frac{3}{4}$ par 2, on changeroit la fraction en $\frac{6}{8}$, & divisant maintenant le numérateur par 2, on auroit aussi-tôt $\frac{3}{8}$ pour le quotient cherché.

En général, s'il est question de diviser

la fraction $\frac{a}{b}$ par c, on la transformera en celle-ci $\frac{ac}{bc}$, & divisant ensuite le numérateur ac par c, on écrira $\frac{a}{bc}$ pour le quotient cherché.

105.

Nous voyons donc que dans le cas où une fraction $\frac{a}{b}$ doit être divisée par un nombre entier c, on n'a qu'à multiplier le dénominateur par ce nombre, & laisser le numérateur tel qu'il est. C'est ainsi que $\frac{5}{8}$ divisé par 3 fait $\frac{5}{24}$, & que $\frac{9}{16}$ divisé par 5 fait $\frac{9}{80}$.

Ce calcul devient cependant plus facile quand le numérateur lui-même est divisible par le nombre entier, comme nous l'avons supposé à l'article 103. Par exemple $\frac{9}{16}$ divisé p[illegible]it, suivant notre derniere regle, [illegible] par la premiere regle, qui est ap[illegible] on a $\frac{3}{16}$, expression qui équivaut a[illegible] qui est plus simple.

106.

On sera maintenant en état de comprendre comment il faut multiplier une fraction $\frac{a}{b}$ par une autre fraction $\frac{c}{d}$. On n'a qu'à considérer que $\frac{c}{d}$ signifie que c est divisé par d; & en partant de-là, on multipliera d'abord la fraction $\frac{a}{b}$ par c, ce qui produit le résultat $\frac{ac}{b}$; après quoi on divisera par d ce qui donne $\frac{ac}{bd}$. Nous tirons de-là la regle suivante, que pour multiplier deux fractions, on n'a besoin que de multiplier séparément les numérateurs & les dénominateurs. Ainsi

$\frac{1}{2}$ par $\frac{2}{3}$ donne le produit $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$;
$\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ fait $\frac{8}{15}$; &
$\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{12}$ produit $\frac{15}{48}$ ou $\frac{5}{16}$, &c.

107.

Il nous reste à montrer comment on doit diviser une fraction par une autre. Il faut remarquer d'abord que si les deux fractions ont le même nombre pour dénominateur,

la division n'a lieu qu'à l'égard des numérateurs ; car il est évident, par exemple, que $\frac{3}{12}$ sont contenus autant de fois dans $\frac{9}{12}$, que 3 l'est dans 9, c'est-à-dire, 3 fois ; & pareillement pour diviser $\frac{8}{12}$ par $\frac{9}{12}$, on n'a qu'à diviser 8 par 9, ce qui donne $\frac{8}{9}$. On aura de même $\frac{6}{20}$ en $\frac{18}{20}$, 3 fois ; $\frac{7}{100}$ en $\frac{49}{100}$, 7 fois ; $\frac{7}{25}$ en $\frac{6}{25}$, $\frac{6}{7}$, &c.

108.

Mais quand les fractions n'ont pas leurs dénominateurs égaux, il faut avoir recours à la maniere dont nous avons dit qu'on les réduisoit au même dénominateur. Qu'on ait, par exemple, la fraction $\frac{a}{b}$ à diviser par la fraction $\frac{c}{d}$, on les réduira d'abord au même dénominateur, & l'on aura $\frac{ad}{bd}$ à diviser par $\frac{bc}{bd}$; & il est clair à présent que le quotient doit être indiqué simplement par la division de ad par bc ; ce qui donne $\frac{ad}{bc}$.

Voici donc la regle : il faut multiplier le numérateur du dividende par le dénominateur

nateur du diviseur, & le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur ; le premier produit sera le numérateur du quotient, & le second produit sera son dénominateur.

109.

Ainsi, en suivant cette regle pour diviser $\frac{5}{8}$ par $\frac{2}{3}$, on aura le quotient $\frac{15}{16}$; la division de $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{2}$ produira $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$, ou 1 & $\frac{1}{2}$; & celle de $\frac{25}{48}$ par $\frac{5}{6}$ donnera $\frac{150}{240}$ ou $\frac{5}{8}$.

110.

On a coutume aussi de présenter cette regle pour la division d'une maniere plus facile à retenir, que voici : Si l'on renverse la fraction par laquelle il s'agit de diviser, de façon que le dénominateur se mette à la place du numérateur, & que celui-ci s'écrive sous le trait, & qu'ensuite on multiplie la fraction, qui est le dividende, par cette fraction renversée, le produit sera le quotient cherché. Ainsi $\frac{3}{4}$ divisé par $\frac{1}{2}$ est autant que $\frac{3}{4}$ multiplié par $\frac{2}{1}$, ce qui fait $\frac{6}{4}$ ou

$1\frac{1}{2}$. De même $\frac{5}{8}$ diviſé par $\frac{2}{3}$ eſt autant que $\frac{5}{8}$ multiplié par $\frac{3}{2}$, ce qui produit $\frac{15}{16}$; ou $\frac{25}{48}$ diviſé par $\frac{5}{6}$ fait autant que $\frac{25}{48}$ multiplié par $\frac{6}{5}$, dont le produit eſt $\frac{150}{240}$ ou $\frac{5}{8}$.

On voit donc en général que de diviſer par la fraction $\frac{1}{2}$, c'eſt la même choſe que de multiplier par $\frac{2}{1}$ ou 2; que la diviſion par $\frac{1}{3}$ revient à la multiplication par $\frac{3}{1}$ ou par 3, &c.

III.

Le nombre 100 diviſé par $\frac{1}{2}$ donnera donc 200; & 1000 diviſé par $\frac{1}{3}$ fait 3000. De plus, s'il s'agit de diviſer 1 par $\frac{1}{1000}$, le quotient eſt 1000; & en diviſant 1 par $\frac{1}{100000}$, il vient 100000. Cela aide à comprendre qu'en diviſant par 0, il doit en réſulter un nombre infiniment grand; car la diviſion de 1 par la petite fraction $\frac{1}{1000000000}$ produit déjà le nombre très-grand 1000000000.

112.

Tout nombre diviſé par lui-même donnant l'unité, on ſent bien qu'une fraction diviſée par elle-même doit auſſi donner le quotient 1; la même vérité ſuit de notre regle: car pour diviſer $\frac{3}{4}$ par $\frac{3}{4}$, il faut multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{4}{3}$, & on obtient $\frac{12}{12}$ ou 1; & s'il s'agit de diviſer $\frac{a}{b}$ par $\frac{a}{b}$, on multiplie $\frac{a}{b}$ par $\frac{b}{a}$; or le produit $\frac{ab}{ab}$ eſt égal à 1.

113.

Nous avons auſſi à expliquer encore une expreſſion dont l'uſage eſt fréquent. On demande, par exemple, ce que c'eſt que la moitié de $\frac{3}{4}$; cela veut dire qu'on doit multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{2}$. De même ſi l'on demande ce que ſont les $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{8}$, on multipliera $\frac{5}{8}$ par $\frac{2}{3}$, ce qui produit $\frac{10}{24}$; & $\frac{3}{4}$ de $\frac{9}{16}$ ſont autant que $\frac{9}{16}$ multiplié par $\frac{3}{4}$, & ſont $\frac{27}{64}$.

114.

Enfin il faut obſerver ici à l'égard des ſignes + & −, les mêmes principes que

nous avons établis plus haut pour les nombres entiers. Ainſi $+\frac{1}{2}$ multiplié par $-\frac{1}{3}$, fait $-\frac{1}{6}$; & $-\frac{2}{3}$ multiplié par $-\frac{4}{5}$, donne $+\frac{8}{15}$. De plus $-\frac{5}{8}$ diviſé par $+\frac{2}{3}$, fait $-\frac{15}{16}$; & $-\frac{3}{4}$ diviſé par $-\frac{3}{4}$, fait $+\frac{12}{12}$ ou $+1$.

CHAPITRE XI.

Des Nombres quarrés.

115.

LE produit d'un nombre multiplié par le même nombre, ſe nomme un *quarré ;* & par cette raiſon on appelle *racine quarrée* ce nombre conſidéré relativement à un tel produit.

Par exemple, quand on multiplie 12 par 12, le produit 144 eſt un quarré dont la racine eſt 12.

Le fondement de cette dénomination eſt pris dans la Géométrie, où l'on trouve le contenu d'un quarré en multipliant ſon côté par lui-même.

116.

Tous les nombres quarrés ſe trouvent donc par la multiplication ; c'eſt-à-dire, en multipliant la racine par elle-même.

C'eſt ainſi que 1 eſt le quarré de 1, parce que 1 multiplié par 1 fait 1 ; & pareillement, que 4 eſt le quarré de 2 ; & 9 le quarré de 3 ; que 2 eſt la racine de 4, & 3 celle de 9.

Nous conſidérerons en premier lieu les quarrés des nombres naturels, & nous donnerons d'abord la petite table qui ſuit, dans laquelle pluſieurs nombres ou racines ſe trouvent ſur la premiere ligne, & leurs quarrés ſur la ſeconde (*).

Nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Quarrés	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169

(*) Nous avons des tables très-complettes pour les quarrés des nombres naturels, publiées ſous le titre de *Tetragonometria Tabularia, &c. auctore J. JOBO LUDOLFO.* Amſtelodami, 1690, *in*-4°. Ces tables vont depuis 1

117.

On remarquera d'abord ſans peine dans ces nombres quarrés rangés ainſi par ordre, une belle propriété ; à ſavoir que, ſi l'on ſouſtrait chacun de ces quarrés de celui qui ſuit immédiatement, les reſtes augmentent toujours de 2, & forment la ſuite que voici :

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, &c.
qui eſt celle des nombres impairs.

118.

Les quarrés des fractions ſe trouvent pareillement, en multipliant une fraction donnée par elle-même. Par exemple, le quarré de $\frac{1}{2}$ eſt $\frac{1}{4}$, &

$\frac{1}{3}$ a pour quarré $\frac{1}{9}$;
$\frac{2}{3}$ — — — — $\frac{4}{9}$;

jusqu'à 100000, non-ſeulement pour trouver ces quarrés, mais auſſi les produits de deux nombres quelconques moindres que 100000 ; ſans parler de différens autres uſages qui ſont détaillés dans l'Introduction qui eſt à la tête de l'Ouvrage.

$\frac{1}{4}$ a pour quarré $\frac{1}{16}$;
$\frac{3}{4}$ — — — — $\frac{9}{16}$, & ainſi de ſuite.

On voit aſſez qu'il ſuffit de diviſer le quarré du numérateur par le quarré du dénominateur, & que la fraction qui exprime cette diviſion, doit être le quarré de la fraction donnée. C'eſt ainſi encore que $\frac{25}{64}$ eſt le quarré de $\frac{5}{8}$; & réciproquement que $\frac{5}{8}$ eſt la racine de $\frac{25}{64}$.

119.

Quand on veut trouver le quarré d'un nombre mixte, ou compoſé d'un nombre entier & d'une fraction, on n'a qu'à le réduire à une ſeule fraction, & prendre enſuite le quarré de cette fraction. Qu'il s'agiſſe, par exemple, de trouver le quarré de $2\frac{1}{2}$; on exprimera d'abord ce nombre par $\frac{5}{2}$, & prenant le quarré de cette fraction, on a $\frac{25}{4}$ ou $6\frac{1}{4}$ pour la valeur du quarré de $2\frac{1}{2}$. De même pour prendre le quarré de $3\frac{1}{4}$, on dira $3\frac{1}{4}$ eſt autant que $\frac{13}{4}$; donc ſon quarré eſt égal à $\frac{169}{16}$, ou à 10 & $\frac{9}{16}$. Voici

pour chaque quart d'augmentation les quarrés des nombres compris entre 3 & 4.

Nombres	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quarrés	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

On peut conclure de cette petite table, que ſi une racine contient une fraction, ſon quarré ne manque pas d'en contenir une auſſi. Soit, par exemple, la racine $1\frac{5}{12}$; ſon quarré eſt $\frac{289}{144}$, ou $2\frac{1}{144}$; c'eſt-à-dire un peu plus grand que le nombre entier 2.

120.

Paſſons aux expreſſions générales. Quand la racine eſt a, le quarré doit être aa; ſi la racine eſt $2a$, le quarré eſt $4aa$; ce qui donne à connoître qu'en doublant la racine, le quarré devient 4 fois plus grand. De même, ſi la racine eſt $3a$, le quarré eſt $9aa$; & ſi la racine eſt $4a$, le quarré eſt $16aa$. Mais ſi la racine eſt ab, le quarré eſt $aabb$; & ſi la racine eſt abc, le quarré eſt $aabbcc$.

121.

Ainſi, quand la racine eſt composée de deux ou de pluſieurs facteurs, il faut multiplier enſemble leurs quarrés; & réciproquement, ſi un quarré eſt composé de deux ou de pluſieurs facteurs, dont chacun eſt un quarré, on n'a qu'à multiplier enſemble les racines de ces quarrés, pour avoir la racine complette du quarré proposé. Ainſi, comme 2304 eſt autant que 4.16.36, la racine quarrée en eſt 2.4.6 ou 48; & en effet 48 ſe trouve être la racine quarrée de 2304, parce que 48.48 fait 2304.

122.

Voyons auſſi ce qu'il faut obſerver dans cette matiere à l'égard des ſignes + & −. Et d'abord il eſt clair que ſi la racine a le ſigne +, c'eſt-à-dire qu'elle eſt un nombre poſitif, ſon quarré doit néceſſairement être de même un nombre poſitif, parce que + par + fait +: le quarré de $+a$

sera $+aa$. Mais si la racine est un nombre négatif, comme $-a$, le quarré n'en devient pas moins positif, puisqu'il est $+aa$; nous pouvons donc conclure que $+aa$ est le quarré tant de $+a$ que de $-a$, & que par conséquent on peut indiquer pour tout quarré deux racines, l'une positive & l'autre négative. La racine quarrée de 25, par exemple, est également $+5$ & -5; parce que -5 multiplié par -5 donne 25 aussi bien que $+5$ par $+5$.

CHAPITRE XII.

Des Racines quarrées & des Nombres irrationnels qui en résultent.

123.

CE que nous avons dit dans le chapitre précédent revient principalement à ceci: Que la racine quarrée d'un nombre proposé n'est autre chose qu'un nombre tel

que son quarré soit égal au nombre proposé, & qu'on peut mettre devant ces racines tant le signe positif que le signe négatif.

124.

Ainsi quand un nombre proposé est un quarré, & qu'on a retenu dans la mémoire un nombre suffisant de nombres quarrés, il est facile de trouver la racine de celui qui est donné. Si c'est 196, par exemple, qui soit ce nombre proposé, on sait que sa racine quarrée est 14.

On traite de même avec facilité les fractions: il est clair, par exemple, que $\frac{5}{7}$ est la racine quarrée de $\frac{25}{49}$; on n'a, pour s'en convaincre, qu'à prendre la racine quarrée du numérateur, & celle du dénominateur.

Si le nombre proposé est un nombre mixte, comme $12\frac{1}{4}$, on le réduira à une seule fraction, laquelle est ici $\frac{49}{4}$, & on verra sur le champ que c'est $\frac{7}{2}$ ou $3\frac{1}{2}$, qui doit être la racine quarrée de $12\frac{1}{4}$.

125.

Mais quand le nombre proposé n'eſt pas un quarré, comme 12 par exemple, il n'eſt pas poſſible non plus d'en extraire la racine quarrée, ou d'indiquer un nombre tel que, multiplié par lui-même, il donne le produit 12. Ce que nous ſavons cependant, c'eſt que la racine quarrée de 12 doit être plus grande que 3, parce que 3.3 ne font que 9; & plus petite que 4, parce que 4.4 font 16, c'eſt-à-dire plus de 12. Nous ſavons même auſſi que cette racine eſt plus petite que $3\frac{1}{2}$; car nous avons vu que le quarré de $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{2}$ eſt $12\frac{1}{4}$. Enfin nous pouvons déterminer cette racine d'une maniere encore plus approchée, en la comparant avec $3\frac{7}{15}$; car le quarré de $3\frac{7}{15}$ ou de $\frac{52}{15}$ eſt $\frac{2704}{225}$ ou 12 & $\frac{4}{225}$, par conſéquent cette fraction eſt encore un peu plus grande que la racine qu'on demande; mais de très-peu, puiſque les deux quarrés ne different entr'eux que de $\frac{4}{225}$.

126.

On pourroit ſoupçonner que puiſque $3\frac{1}{2}$ & $3\frac{7}{15}$ ſont des nombres plus grands que la racine de 12, il ſeroit poſſible d'ajouter à 3 une fraction un peu plus petite que $\frac{7}{15}$, & préciſément telle que le quarré de la ſomme fût égal à 12.

Eſſayons donc avec $3\frac{3}{7}$, puiſque $\frac{3}{7}$ eſt un peu moindre que $\frac{7}{15}$. Or $3\frac{3}{7}$ eſt autant que $\frac{24}{7}$, dont le quarré eſt $\frac{576}{49}$, & par conſéquent plus petit de $\frac{12}{49}$ que le quarré de 12, qu'on peut exprimer par $\frac{588}{49}$. Il eſt donc prouvé que $3\frac{3}{7}$ eſt plus petit, & que $3\frac{7}{15}$ eſt plus grand que la racine cherchée. Eſſayons donc un nombre un peu plus grand que $3\frac{3}{7}$, mais pourtant plus petit que $3\frac{7}{15}$, par exemp. $3\frac{5}{11}$. Ce nombre qui vaut $\frac{38}{11}$, a pour quarré $\frac{1444}{121}$. Or en réduiſant 12 à ce dénominateur on trouve $\frac{1452}{121}$; il s'enſuit donc que $3\frac{5}{11}$ eſt encore plus petit que la racine de 12, à ſavoir de $\frac{8}{121}$. Subſtituons donc à $\frac{5}{11}$ la fraction $\frac{6}{13}$, qui eſt un peu plus grande,

& voyons encore ce qui résulte de la comparaison du quarré de $3\frac{6}{13}$ avec le nombre 12 proposé: le quarré de $3\frac{6}{13}$ est $\frac{2025}{169}$, or 12 réduit à la même dénomination fait $\frac{2028}{169}$; ainsi $3\frac{6}{13}$ est encore trop petit, quoique seulement de $\frac{3}{169}$, tandis que $3\frac{7}{15}$ s'est trouvé trop grand.

127.

On peut comprendre facilement que quelque fraction que l'on joigne à 3, le quarré de cette somme doit toujours contenir une fraction, & ne peut jamais devenir exactement égal au nombre entier 12. Ainsi, quoique nous sachions que la racine quarrée de 12 est plus grande que $3\frac{6}{13}$ & moindre que $3\frac{7}{15}$, nous sommes cependant forcés de convenir que nous ne sommes pas en état d'assigner une fraction intermédiaire entre ces deux-là, & telle en même temps qu'ajoutée à 3, elle exprime exactement la racine quarrée de 12. Avec tout cela cependant on ne peut pas dire que la

racine quarrée de 12 soit indéterminée par elle-même & absolument; il suit seulement de ce que nous avons rapporté, que cette racine, quoiqu'elle ait nécessairement une grandeur déterminée, ne sauroit être exprimée par des fractions.

128.

Il est donc une espece de nombres qui ne sont aucunement assignables par des fractions, & qui sont cependant des quantités déterminées; la racine quarrée de 12 nous en a offert un exemple. On nomme cette nouvelle espece de nombres, *des nombres irrationnels;* ils se présentent toutes les fois qu'on cherche la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas un quarré. C'est ainsi que 2 n'étant pas un quarré parfait, la racine quarrée de 2, ou le nombre qui, multiplié par lui-même, produit 2, est une quantité irrationnelle. On nomme aussi ces nombres des *quantités sourdes* ou *des incommensurables.*

129.

Ces quantités irrationnelles, quoiqu'elles ne puiſſent pas s'exprimer par des fractions, ſont cependant des grandeurs dont on peut ſe faire une idée juſte. Car quelque cachée que nous paroiſſe, par exemple, la racine de 12, nous n'ignorons pas cependant que c'eſt un nombre qui, multiplié par lui-même, produit exactement 12; & cette propriété eſt ſuffiſante pour nous donner une idée de ce nombre, d'autant qu'il dépend de nous d'approcher de plus en plus de ſa valeur.

130.

Comme on eſt donc ſuffiſamment au fait de la ſignification des nombres irrationnels dont il eſt queſtion, on eſt convenu d'un certain ſigne, pour indiquer les racines quarrées des nombres qui ne ſont pas des quarrés parfaits. Ce ſigne a cette figure $\surd$, & ſe prononce en effet *racine quarrée*. Ainſi $\sqrt{12}$ ſignifie la racine quarrée de 12, ou le

le nombre qui, multiplié par lui-même, fait 12. De même, $\sqrt{2}$ indique la racine quarrée de 2; $\sqrt{3}$, celle de 3; $\sqrt{\frac{2}{3}}$, la racine quarrée de $\frac{2}{3}$; & en général $\sqrt{a}$ indique la racine quarrée du nombre a. Toutes les fois donc qu'on voudra indiquer la racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas un quarré, on n'aura qu'à ſe ſervir de la marque $\surd$ en la mettant devant ce nombre.

131.

L'explication que nous avons donnée des nombres irrationnels, nous met auſſitôt ſur la voie pour appliquer à ces nombres les calculs uſités. Car ſachant, par exemple, que la racine quarrée de 2, multipliée par elle-même, doit produire 2; nous ſavons auſſi que la multiplication de $\sqrt{2}$ par $\sqrt{2}$ doit produire néceſſairement 2; que de même celle de $\sqrt{3}$ par $\sqrt{3}$ doit donner 3; que $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$ fait 5; que $\sqrt{\frac{2}{3}}$ par $\sqrt{\frac{2}{3}}$ fait $\frac{2}{3}$; & que généralement $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{a}$ produit a.

132.

Mais quand il s'agit de multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$, le produit est $\sqrt{ab}$; parce que nous avons montré plus haut que si un quarré a des facteurs, sa racine doit être composée des racines de ces facteurs. C'est pourquoi l'on trouve la racine quarrée du produit ab, laquelle est $\sqrt{ab}$, en multipliant la racine quarrée de a ou $\sqrt{a}$, par la racine quarrée de b, ou par $\sqrt{b}$. Il est clair par-là que si b étoit égal à a, on auroit $\sqrt{aa}$ pour le produit de $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$. Or $\sqrt{aa}$ est évidemment a, parce que aa est le quarré de a.

133.

S'il s'agit de la division, & qu'on ait $\sqrt{a}$, par exemple, à diviser par $\sqrt{b}$, on obtient $\sqrt{\frac{a}{b}}$; & il peut arriver ici que dans le quotient l'irrationalité s'évanouisse. C'est ainsi qu'ayant à diviser $\sqrt{18}$ par $\sqrt{8}$, on obtient le quotient $\sqrt{\frac{18}{8}}$, lequel se réduit à

$\sqrt{\frac{9}{4}}$, & par conséquent à $\sqrt{\frac{3}{2}}$, parce que $\frac{9}{4}$ est le quarré de $\frac{3}{2}$.

134.

Quand le nombre devant lequel on a mis le signe radical $\sqrt{}$, est lui-même un quarré, on en exprime la racine de la maniere accoutumée. Ainsi $\sqrt{4}$ est autant que 2, $\sqrt{9}$ autant que 3, $\sqrt{36}$ autant que 6, & $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ autant que $\frac{7}{2}$ ou $3\frac{1}{2}$. On voit que dans ces cas l'irrationalité n'est qu'apparente, & qu'elle disparoît d'elle-même.

135.

Il est facile aussi de multiplier nos nombres irrationnels par les nombres ordinaires. Par exemple, 2 multiplié par $\sqrt{5}$ fait $2\sqrt{5}$, & 3 fois $\sqrt{2}$ fait $3\sqrt{2}$. Dans ce second exemple cependant, comme 3 est autant que $\sqrt{9}$, on peut exprimer aussi 3 fois $\sqrt{2}$ par $\sqrt{9}$ multipliant $\sqrt{2}$, ou par $\sqrt{18}$. De même $2\sqrt{a}$ est autant que $\sqrt{4a}$, & $3\sqrt{a}$ autant que $\sqrt{9a}$. Et en général

$b\sqrt{a}$ a la même valeur que la racine quarrée de bba ou $\sqrt{abb}$; d'où l'on infere réciproquement, que quand le nombre qui est précédé du signe radical contient un quarré, on peut prendre la racine de ce quarré & la mettre devant le signe, comme on feroit en écrivant $b\sqrt{a}$ au lieu de $\sqrt{bba}$. On comprendra aisément d'après cela les réductions qui suivent :

$\sqrt{8}$ ou $\sqrt{2.4}$ est autant que $2\sqrt{2}$;
$\sqrt{12}$ ou $\sqrt{3.4}$ — — — $2\sqrt{3}$;
$\sqrt{18}$ ou $\sqrt{2.9}$ — — — $3\sqrt{2}$;
$\sqrt{24}$ ou $\sqrt{6.4}$ — — — $2\sqrt{6}$;
$\sqrt{32}$ ou $\sqrt{2.16}$ — — — $4\sqrt{2}$;
$\sqrt{75}$ ou $\sqrt{3.25}$ — — — $5\sqrt{3}$;

& ainsi de suite.

136.

La division est fondée sur les mêmes principes. $\sqrt{a}$ divisé par $\sqrt{b}$, fait $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ou $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Et pareillement

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ est autant que $\sqrt{\frac{8}{2}}$ ou $\sqrt{4}$ ou 2;
$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ — — — — $\sqrt{\frac{18}{2}}$ ou $\sqrt{9}$ ou 3;
$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ — — — — $\sqrt{\frac{12}{3}}$ ou $\sqrt{4}$ ou 2.

De plus

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ est autant que $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$ ou $\sqrt{\frac{4}{2}}$ ou $\sqrt{2}$;
$\frac{3}{\sqrt{3}}$ — — — — $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$ ou $\sqrt{\frac{9}{3}}$ ou $\sqrt{3}$;
$\frac{12}{\sqrt{6}}$ — — — — $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$ ou $\sqrt{\frac{144}{6}}$, ou $\sqrt{24}$ ou $\sqrt{6.4}$, ou enfin $2\sqrt{6}$.

137.

Il n'y a rien à remarquer de particulier à l'égard de l'addition & de la soustraction, parce qu'on ne fait que lier les nombres par les signes + & −. Par exemple, $\sqrt{2}$ ajouté à $\sqrt{3}$ s'écrit $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; & $\sqrt{3}$ soustrait de $\sqrt{5}$ s'écrit $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

138.

Enfin nous ferons observer que par opposition à ces nombres irrationnels, on nomme les autres nombres, tant entiers que fractionnaires, des *nombres rationnels*.

Ainsi toutes les fois qu'on parle de nombres rationnels, on entend par-là des nombres entiers, ou bien aussi des fractions.

CHAPITRE XIII.

Des Quantités impossibles ou imaginaires, qui dérivent de la même source.

139.

Nous avons déjà vu plus haut que les quarrés des nombres, tant positifs que négatifs, sont toujours positifs ou affectés du signe +; ayant fait observer que $-a$ multiplié par $-a$ fait $+aa$, tout comme le produit de $+a$ par $+a$. C'est pourquoi, dans le chapitre précédent, nous avons supposé que tous les nombres dont il s'agissoit d'extraire les racines quarrées, étoient positifs.

140.

Quand il arrive donc qu'il soit question d'extraire la racine d'un nombre négatif, on ne peut que se trouver fort embarrassé, n'y ayant aucun nombre assignable dont le

quarré soit un nombre négatif. Car supposez, par exemple, qu'on voulût extraire la racine de -4, ce seroit demander un nombre tel que, multiplié par lui-même, il donnât -4; or ce nombre cherché n'est ni $+2$ ni -2, parce que le quarré, tant de $+2$ que de -2, est $+4$ & non pas -4.

141.

Il faut donc conclure que la racine quarrée d'un nombre négatif ne peut être ni un nombre positif, ni un nombre négatif, puisqu'aussi les quarrés des nombres négatifs prennent le signe *plus*. Par conséquent il faut que la racine en question appartienne à une espece tout-à-fait particuliere de nombres; puisqu'elle ne peut être comptée ni parmi les nombres positifs, ni parmi les nombres négatifs.

142.

Or nous avons remarqué plus haut que les nombres positifs sont tous plus grands

que rien ou o, & que les nombres négatifs ſont tous plus petits que rien ou o ; de façon que tout ce qui ſurpaſſe o s'exprime par des nombres poſitifs, & que tout ce qui eſt moindre que o, s'exprime par des nombres négatifs. Nous voyons donc que les racines quarrées de nombres négatifs ne ſont ni plus grandes ni plus petites que rien. Cependant on ne peut pas dire qu'elles ſoient o ; car o multiplié par o fait o, & par conſéquent ne donne pas un nombre négatif.

143.

Or puiſque tous les nombres qu'il eſt poſſible de s'imaginer, ſont ou plus grands ou plus petits que o, ou ſont o même, il eſt clair qu'on ne peut pas même compter la racine quarrée d'un nombre négatif parmi les nombres poſſibles, & il faut donc dire que c'eſt une quantité impoſſible. C'eſt de cette façon que nous ſommes conduits à l'idée de nombres qui par leur nature ſont

impoſſibles. On nomme ordinairement ces nombres des *quantités imaginaires*, parce qu'elles exiſtent purement dans l'imagination.

144.

Toutes les expreſſions, comme $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, &c. ſont par conſéquent des nombres impoſſibles ou imaginaires, puiſqu'ils indiquent des racines de quantités négatives. Et c'eſt de pareils nombres qu'on ſoutient avec raiſon qu'ils ne ſont ni rien, ni plus que rien, ni moins que rien ; ce qui fait principalement qu'on eſt obligé de les déclarer impoſſibles.

145.

Avec tout cela cependant ces nombres ſe préſentent à l'eſprit, ils ont lieu dans notre imagination, & nous ne laiſſons pas d'en avoir une idée ſuffiſante ; puiſque nous ſavons que par $\sqrt{-4}$, par exemple, on entend un nombre qui, multiplié par lui-même, fait -4. C'eſt auſſi pourquoi rien

ne nous empêche d'appliquer le calcul à ces nombres imaginaires, & de les employer.

146.

Notre premiere notion dans la matiere que nous traitons, eſt que le quarré de $\sqrt{-3}$, par exemple, ou le produit de $\sqrt{-3}$ par $\sqrt{-3}$, eſt -3; que celui de $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-1}$, fait -1; & en général, qu'en multipliant $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-a}$, ou en prenant le quarré de $\sqrt{-a}$, on obtient $-a$.

147.

Maintenant, comme $-a$ ſignifie autant que $+a$ multiplié par -1, & que la racine quarrée d'un produit ſe trouve en multipliant enſemble les racines des facteurs, il s'enſuit que la racine de a multipliée par -1, ou $\sqrt{-a}$, eſt autant que $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{-1}$. Or $\sqrt{a}$ eſt un nombre poſſible ou réel, par conſéquent ce qu'il y a d'impoſſible dans une quantité imaginaire, peut toujours ſe réduire à $\sqrt{-1}$. Par cette raiſon donc, $\sqrt{-4}$ eſt autant que $\sqrt{4}$ multipliée par $\sqrt{-1}$, & autant que $2\sqrt{-1}$, à cauſe de $\sqrt{4}$ égal à 2. Par la même raiſon $\sqrt{-9}$ ſe réduit à $\sqrt{9}.\sqrt{-1}$, ou à $3\sqrt{-1}$; & $\sqrt{-16}$ ſignifie $4\sqrt{-1}$.

148.

De plus, comme $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$, l'on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multipliée par $\sqrt{-3}$; & $\sqrt{4}$ ou 2, pour la valeur du produit de $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-4}$. On voit donc que deux nombres imaginaires, multipliés l'un par l'autre, en produiſent un réel ou poſſible.

Mais au contraire un nombre poſſible, multiplié par un nombre impoſſible, donne toujours de l'imaginaire: $\sqrt{-3}$ par $\sqrt{+5}$ fait $\sqrt{-15}$.

149.

Il en eſt de même à l'égard de la diviſion; car $\sqrt{a}$ diviſé par $\sqrt{b}$ faiſant $\sqrt{\frac{a}{b}}$,

il eſt clair que $\sqrt{-4}$ diviſé par $\sqrt{-1}$ fera $\sqrt{+4}$ ou 2 ; que $\sqrt{+3}$ diviſé par $\sqrt{-3}$ fera $\sqrt{-1}$; & que 1 diviſé par $\sqrt{-1}$ me donne $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ ou $\sqrt{-1}$; parce que 1 eſt autant que $\sqrt{+1}$.

150.

Nous avons obſervé plus haut que la racine quarrée d'un nombre quelconque a toujours deux valeurs, l'une poſitive & l'autre négative ; que $\sqrt{4}$, par exemple, eſt également $+2$ & -2, & qu'en général on peut adopter $-\sqrt{a}$ comme $+\sqrt{a}$ pour la racine quarrée de a. Cette remarque a lieu auſſi, quand il s'agit de nombres imaginaires ; la racine quarrée de $-a$ eſt également $+\sqrt{-a}$ & $-\sqrt{-a}$; mais il faut ſe garder de confondre les ſignes $+$ & $-$ qui ſont devant le ſigne radical $\sqrt{}$, & le ſigne qui ne vient qu'après cette marque $\sqrt{}$.

151.

Il nous reſte enfin à lever le doute qu'on pourroit avoir ſur l'utilité des nombres dont nous venons de parler ; car en effet ces nombres étant impoſſibles, il ne ſeroit pas étonnant qu'on les crût tout-à-fait inutiles & l'objet ſeulement d'une vaine ſpéculation. On ſe tromperoit cependant ; le calcul des imaginaires eſt de la plus grande importance ; ſouvent il ſe préſente des queſtions, deſquelles on ne ſauroit dire ſur le champ ſi elles renferment quelque choſe de réel & de poſſible ou non. Or quand la ſolution d'une pareille queſtion nous conduit à des nombres imaginaires, nous ſommes certains que ce qu'on demande eſt impoſſible.

Afin d'éclaircir ce que nous venons de dire par un exemple, ſuppoſons qu'on propoſe la queſtion : de diviſer le nombre 12 en deux parties, telles que le produit de ces parties faſſe 40. Si l'on réſout cette

question par les regles ordinaires, on trouve pour les parties cherchées $6+\sqrt{-4}$ & $6-\sqrt{-4}$; mais ces nombres sont imaginaires: on conclut donc par cela même qu'il est impossible de résoudre la question.

On saisira facilement la différence, en supposant que la question eût été de diviser 12 en deux parties qui, multipliées ensemble, fissent 35; car il est évident que ces parties seroient 7 & 5.

CHAPITRE XIV.

Des Nombres Cubiques.

152.

QUAND un nombre a été multiplié trois fois par lui-même, ou, ce qui revient au même, que le quarré d'un nombre a été multiplié encore une fois par ce nombre, on a un produit qui se nomme un *cube* ou un *nombre cubique*. C'est ainsi

que le cube de *a* est *aaa*, vu que c'est ce qu'on obtient en multipliant *a* par soi-même, ou par *a*, & ensuite ce quarré *aa* encore par *a*.

On voit par-là que les cubes des nombres naturels doivent se suivre dans l'ordre que voici (*):

Nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubes	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

153.

Si nous considérons les différences de ces nombres cubiques, comme nous l'avons fait pour les quarrés, en soustrayant chaque cube de celui qui le suit, nous obtenons la suite de nombres que voici:

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271; nous ne remarquons d'abord aucune régu-

(*) On doit à un Mathématicien, nommé *J. Paul Buchner*, des tables publiées à Nuremberg en 1701, dans lesquelles on trouve tant les quarrés que les cubes de tous les nombres depuis 1 jusqu'à 12000.

larité dans cette suite ; mais si nous prenons les différences de ces nombres, nous voyons se former la série suivante :

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54 ;

dans laquelle les termes augmentent toujours évidemment de 6.

154.

Après la définition que nous avons donnée du cube, il ne sera pas difficile de trouver les cubes des nombres fractionnaires : on verra que $\frac{1}{8}$ est le cube de $\frac{1}{2}$; que $\frac{1}{27}$ est le cube de $\frac{1}{3}$, & que $\frac{8}{27}$ est celui de $\frac{2}{3}$. En effet on n'a qu'à prendre séparément le cube du numérateur & celui du dénominateur, on aura $\frac{27}{64}$ pour le cube de la fraction $\frac{3}{4}$.

155.

Si c'est d'un nombre mixte qu'il s'agit de trouver le cube, il faut d'abord le réduire en une seule fraction, & procéder ensuite comme il a été dit. Pour trouver, par exemple, le cube de $1\frac{1}{2}$, il faut prendre celui de $\frac{3}{2}$, qui est $\frac{27}{8}$, ou 3 & $\frac{3}{8}$. De même le cube de $1\frac{1}{4}$, ou de la fraction seule $\frac{5}{4}$, est $\frac{125}{64}$ ou 1 & $\frac{61}{64}$, & le cube de $3\frac{1}{4}$ ou de $\frac{13}{4}$ est $\frac{2197}{64}$, ou $34\frac{21}{64}$.

156.

Puisque aaa est le cube de a, celui du nombre ab sera $aaabbb$; d'où l'on voit que si un nombre a deux ou plusieurs facteurs, on peut trouver son cube en multipliant ensemble les cubes de ces facteurs. Par exemple, comme 12 est autant que 3.4, on multiplie le cube de 3, qui est 27, par le cube de 4 qui est 64, & on obtient 1728, cube de 12. On voit de plus que le cube de $2a$ est $8aaa$; & par conséquent 8 fois plus grand que le cube de a ; & de même, que le cube de $3a$ est $27aaa$, c'est-à-dire qu'il est 27 fois plus grand que le cube de a.

157.

Faisons attention aussi aux signes + & −. Il est clair d'abord que le cube d'un

nombre positif $+a$ ne peut qu'être positif de même, c'est-à-dire $+aaa$. Mais s'il s'agit de prendre le cube d'un nombre négatif $-a$, on verra qu'en prenant d'abord le quarré, lequel est $+aa$, & multipliant ensuite, selon la regle, ce quarré par $-a$, le cube cherché devient $-aaa$. Il n'en est donc pas, à cet égard, des nombres cubiques comme des nombres quarrés, puisque ceux-ci se trouvent toujours positifs. Le cube de -1 est -1, celui de -2 est -8, celui de -3 est -27, & ainsi de suite.

CHAPITRE XV.

Des Racines cubiques & des Nombres irrationnels qui en dérivent.

158.

De même qu'on peut, comme on a vu, trouver le cube d'un nombre donné, on peut réciproquement aussi, étant donné un

nombre quelconque, trouver le nombre qui, multiplié trois fois par lui-même, produit le nombre proposé. Ce nombre cherché s'appelle relativement à l'autre, *la racine cubique*. Ainsi la racine cubique d'un nombre donné est le nombre dont le cube est égal à ce nombre donné.

159.

Il est donc facile de déterminer la racine cubique, quand le nombre proposé est réellement un cube, comme nous en avons vu des exemples dans le chapitre précédent. On sent bien que la racine cubique de 1 est 1; que celle de 8 est 2; que celle de 27 est 3; que celle de 64 est 4, & ainsi de suite. Et pareillement, que la racine cubique de -27 est -3; & que celle de -125 est -5.

De plus, que si le nombre proposé est rompu, comme $\frac{8}{27}$, la racine cubique en doit être $\frac{2}{3}$; & que celle de $\frac{64}{343}$ est $\frac{4}{7}$. Enfin, que la racine cubique d'un nombre mixte

$2\frac{10}{27}$ doit être $\frac{4}{3}$ ou $1\frac{1}{3}$; parce que $2\frac{10}{27}$ eſt autant que $\frac{84}{27}$.

160.

Mais ſi le nombre propoſé n'eſt pas réellement un cube, ſa racine cubique ne pourra pas non plus s'exprimer ni en nombres entiers, ni en nombres fractionnaires. Par exemple, 43 n'eſt pas un nombre cubique; je dis donc qu'il eſt impoſſible d'aſſigner un nombre, ſoit entier ſoit fractionnaire, dont le cube faſſe exactement 43. Ce qu'on peut aſſurer cependant, c'eſt que la racine cubique de ce nombre eſt plus grande que 3, vu que le cube de 3 ne fait que 27, & que cette racine eſt plus petite que 4, parce que le cube de 4 eſt 64. Nous ſavons donc que la racine cubique cherchée eſt néceſſairement contenue entre les nombres 3 & 4.

161.

Si l'on veut donc, puiſque la racine cubique de 43 ſurpaſſe 3, ajouter à 3 une

fraction; il eſt ſûr qu'on pourra de plus en plus approcher de la vraie valeur de cette racine; mais on ne pourra cependant jamais indiquer de nombre qui exprime exactement cette valeur; parce que le cube d'un nombre mixte ne peut jamais être parfaitement égal à un nombre entier, tel qu'eſt 43. Si l'on ſuppoſoit, par exemple, que $3\frac{1}{2}$ ou $\frac{7}{2}$ fût la racine cubique cherchée de 43, on ſe tromperoit de $\frac{1}{8}$; car le cube de $\frac{7}{2}$ ne fait que $\frac{343}{8}$ ou $42\frac{7}{8}$.

162.

Il eſt donc clair par-là que la racine cubique de 43 ne peut en aucune maniere s'exprimer ſoit par des nombres entiers, ſoit par des fractions. Cependant on a une idée diſtincte de la grandeur de cette racine; cela engage à ſe ſervir, pour l'indiquer, du ſigne $\sqrt[3]{}$, qu'on met devant le nombre propoſé, & qu'on prononce *racine cubique*, afin de la diſtinguer de la racine quarrée, laquelle on ne fait ſouvent que

nommer simplement racine. Ainsi $\sqrt[3]{43}$ signifie la racine cubique de 43, c'est-à-dire, le nombre dont le cube est 43, ou qui, multiplié trois fois par lui-même, fait 43.

163.

Il est donc clair aussi que de telles expressions ne peuvent appartenir aux quantités rationnelles, & qu'elles constituent plutôt une espece particuliere de quantités irrationnelles. Elles n'ont même rien de commun avec les racines quarrées, & il n'est pas possible d'exprimer une telle racine cubique par une racine quarrée, comme par exemple par $\sqrt{12}$; car le quarré de $\sqrt{12}$ étant 12, son cube sera $12\sqrt{12}$, par conséquent encore irrationnel & tel qu'il ne peut être égal à 43.

164.

Que si le nombre proposé est un cube réel, nos expressions deviennent rationnelles; $\sqrt[3]{1}$ est autant que 1; $\sqrt[3]{8}$ est autant que 2; $\sqrt[3]{27}$ autant que 3; & en général $\sqrt[3]{aaa}$ autant que a.

165.

S'il étoit question de multiplier une racine cubique comme $\sqrt[3]{a}$ par une autre comme $\sqrt[3]{b}$, le produit doit être $\sqrt[3]{ab}$; car nous savons que la racine cubique d'un produit ab se trouve en multipliant ensemble les racines cubiques des facteurs. On voit par cela même que s'il s'agissoit de la division de $\sqrt[3]{a}$ par $\sqrt[3]{b}$, le quotient seroit $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

On comprend aussi que $2\sqrt[3]{a}$ est autant que $\sqrt[3]{8a}$, parce que 2 équivaut à $\sqrt[3]{8}$; que $3\sqrt[3]{a}$ est autant que $\sqrt[3]{27a}$, & $b\sqrt[3]{a}$ autant que $\sqrt[3]{abbb}$. Ainsi réciproquement, si le nombre qui suit le signe radical a un facteur qui soit un cube, on peut le faire

difparoître en en mettant la racine cubique devant le figne. Par exemple, au lieu de $\sqrt[3]{64a}$ on peut écrire $4\sqrt[3]{a}$; & $5\sqrt[3]{a}$ au lieu de $\sqrt[3]{125a}$. Il fuit de-là que $\sqrt[3]{16}$ eft autant que $2\sqrt[3]{2}$, parce que 16 eft autant que 8.2.

167.

Quand un nombre propofé eft négatif, fa racine cubique n'eft pas fujette aux difficultés que nous avons rencontrées en traitant des racines quarrées. Car puifque les cubes de nombres négatifs font négatifs, de même il s'enfuit qu'auffi les racines cubiques de nombres négatifs font fimplement négatives. Ainfi $\sqrt[3]{-8}$ fignifie -2, & $\sqrt[3]{-27}$, eft autant que -3. Il s'enfuit auffi que $\sqrt[3]{-12}$ eft la même chofe que $-\sqrt[3]{12}$, & que $\sqrt[3]{-a}$ peut s'exprimer par $-\sqrt[3]{a}$. D'où l'on voit que le figne $-$, s'il fe trouve derriere le figne de la racine cubique, auroit auffi pu fe mettre devant ce figne. Nous ne fommes donc pas conduits ici à des nombres impoffibles ou imaginaires, comme cela nous eft arrivé en confidérant les racines quarrées des nombres négatifs.

CHAPITRE XVI.

Des Puiffances en général.

168.

LE produit qu'on obtient en multipliant un nombre plufieurs fois par lui-même, fe nomme *une puiffance.* Ainfi un quarré qui provient de la multiplication d'un nombre par lui-même, & un cube qu'on obtient en multipliant un nombre trois fois par lui-même, font des puiffances. On dit auffi dans le premier cas, que le nombre eft élevé au fecond degré, ou à la feconde puiffance; & dans l'autre cas, que le nombre eft élevé au troifieme degré ou à la troifieme puiffance.

169.

C'eſt qu'on diſtingue ces puiſſances l'une de l'autre par le nombre de fois que le nombre propoſé a été multiplié par lui-même. Par exemple, un quarré ſe nomme la ſeconde puiſſance, parce qu'un certain nombre donné a été multiplié deux fois par lui-même ; ſi un nombre a été multiplié trois fois par lui-même, on nomme le produit la troiſieme puiſſance, laquelle ſignifie donc la même choſe qu'un cube. Multipliez un nombre quatre fois par lui-même, vous aurez ſa quatrieme puiſſance, ou bien ce qu'on nomme communément *le quarré-quarré* ou *le bi-quarré :* & il n'eſt pas difficile à préſent de comprendre ce qu'on entend par la cinquieme, ſixieme, ſeptieme, &c. puiſſance d'un nombre. J'ajoute ſeulement que ces puiſſances ceſſent après le quatrieme degré d'avoir d'autres noms particuliers.

170.

Pour éclaircir tout cela encore mieux, nous remarquerons d'abord que les puiſſances de 1 reſtent conſtamment les mêmes ; parce que, quelque nombre de fois qu'on multiplie ce nombre 1 par lui-même, le produit ſe trouve toujours être 1. Nous commencerons donc ici par indiquer les puiſſances de 2 & de 3. Voici l'ordre qu'elles ſuivent :

Puiſſances	*du Nombre 2,*	*du Nombre 3.*
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Mais ce ſont ſur-tout les puiſſances du nombre 10 qui ſont remarquables; car ſur ces puiſſances ſe fonde toute notre Arithmétique. En voici quelques-unes rangées par ordre, en commençant par la premiere puiſſance:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000,	&c.

171.

Si l'on veut maintenant enviſager la choſe d'une maniere plus générale, on verra que les puiſſances d'un nombre quelconque *a* ſe ſuivent dans cet ordre:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
a,	*aa*,	*aaa*,	*aaaa*,	*aaaaa*,	*aaaaaa*,	*&c.*

Mais on ne tardera pas à s'appercevoir de l'inconvénient qui accompagne cette façon d'écrire les puiſſances, & qui conſiſte en ce qu'il faudroit, pour exprimer de grandes puiſſances, écrire la même lettre très-ſouvent; le Lecteur même n'auroit pas moins de peine, s'il étoit obligé de compter toutes ces lettres pour ſavoir quelle puiſſance on a voulu indiquer. La centieme puiſſance, par exemple, ne s'écriroit pas commodément de cette façon-là, & il ſeroit encore plus difficile de la reconnoître.

172.

Afin d'éviter cet inconvénient, on a imaginé une façon bien plus commode d'exprimer de telles puiſſances, & qui mérite à cauſe de ſon uſage étendu, d'être expliquée ſoigneuſement: ſavoir, pour exprimer, par exemple, la centieme puiſſance, on écrit ſimplement le nombre 100 au-deſſus de celui dont on veut exprimer la centieme puiſſance, & un peu vers la droite: ainſi a^{100}, qui ſignifie *a* élevé à 100, indique la centieme puiſſance de *a*. Il ne faut pas oublier qu'on donne le nom d'*expoſant* au nombre écrit au-deſſus de celui dont il indique la puiſſance ou le degré, & qui eſt 100 dans le cas que nous avons ſuppoſé.

173.

De cette maniere a^2 signifie donc a élevé à 2, ou la seconde puissance de a, laquelle cependant on indique aussi quelquefois par aa, parce que l'une & l'autre expression s'écrit & se comprend avec la même facilité. Mais déjà pour exprimer le cube ou la troisieme puissance aaa, on écrit a^3 conformément à la nouvelle regle, afin de gagner de la place. De même a^4 signifie la quatrieme, a^5 la cinquieme, & a^6 la sixieme puissance de a.

174.

En un mot toutes les puissances de a se représenteront par

$a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}$, &c.

d'où l'on voit que, suivant cette maniere, on auroit très-bien pu écrire a^1 au lieu de a pour le premier membre de la série, afin d'en mieux faire appercevoir l'ordre. En effet a^1 n'est autre chose que a, vu que

cette unité indique que la lettre a ne doit s'écrire qu'une fois. Une pareille suite de puissances se nomme aussi une progression géométrique, parce que chaque terme est d'un nombre de fois plus grand que le précédent.

175.

Comme dans cette même suite de puissances chaque terme se trouve en multipliant par a celui qui le précede, ce qui augmente l'exposant de 1; on peut aussi, au moyen d'un terme donné, trouver celui qui le précede, en divisant par a, parce que c'est diminuer l'exposant d'une unité. Cela nous apprend que le terme qui précede le premier terme a^1, doit être nécessairement $\frac{a}{a}$ ou 1; or si l'on se regle sur les exposans, on conclura sans peine que ce terme qui précede le premier, doit être a^0. On peut donc déduire de-là la propriété remarquable, que a^0 est constamment égal à 1, quelque valeur grande ou petite qu'ait

le nombre a, & même quand a n'eſt rien; c'eſt-à-dire que même 0^0 fait 1.

176.

Nous pouvons continuer encore notre ſuite de puiſſances en rétrogradant, & même de deux manieres différentes: l'une en diviſant toujours par a; l'autre en diminuant l'expoſant d'une unité. Et nous ne pouvons douter que, ſuivant l'une ou l'autre façon, les termes ne ſoient parfaitement égaux. Nous allons préſenter cette ſérie rétrograde ſous l'une & l'autre forme, en avertiſſant que c'eſt auſſi à rebours, c'eſt-à-dire, en allant de la droite vers la gauche, que l'on doit la lire.

Ie.	$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a
	$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^1}$		
IIe.	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177.

Nous voici parvenus à connoître des puiſſances dont les expoſans ſont négatifs, & à pouvoir aſſigner exactement les valeurs de ces puiſſances. Nous mettrons ſous les yeux ce que nous avons trouvé, de la façon qui ſuit: d'abord

a^0 eſt autant que 1; enſuite

a^{-1} ———————— $\frac{1}{a}$;

a^{-2} ———————— $\frac{1}{aa}$ ou $\frac{1}{a^2}$;

a^{-3} ———————— $\frac{1}{a^3}$;

a^{-4} ———————— $\frac{1}{a^4}$,

& ainſi de ſuite.

178.

Il eſt clair auſſi par ce qui a précédé, comment on doit trouver les puiſſances d'un produit ab. Elles ſeront évidemment ab ou a^1b^1, a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, &c. Et on trouvera de même les puiſſances des fractions; par exemple, celles de $\frac{a}{b}$ ſont $\frac{a^1}{b^1}$, $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, $\frac{a^5}{b^5}$, $\frac{a^6}{b^6}$, $\frac{a^7}{b^7}$, &c.

179.

Enfin nous avons à confidérer auffi les puiffances des nombres négatifs. Or fuppofons donné le nombre $-a$; fes puiffances fe fuivront dans l'ordre que voici :
$-a, +aa, -a^3, +a^4, -a^5, +a^6$ &c.

On voit donc qu'il n'y a que les puiffances dont les expofans font des nombres impairs, qui deviennent négatives, & qu'au contraire toutes les puiffances qui ont un nombre pair pour expofant, font pofitives. En effet, les puiffances troifieme, cinquieme, feptieme, neuvieme, &c. ont toutes le figne $-$; & les puiffances feconde, quatrieme, fixieme, huitieme, &c. font affectées du figne $+$.

CHAPITRE XVII.

Du calcul des Puiffances.

180.

Nous n'avons rien à obferver de particulier par rapport à l'addition & à la fouftraction des puiffances ; car on ne fait qu'indiquer ces opérations moyennant les fignes $+$ & $-$, quand les puiffances font différentes entr'elles. Par exemple, $a^3 + a^2$ eft la fomme de la feconde & de la troifieme puiffance de a; & $a^5 - a^4$ eft ce qui refte en fouftrayant la quatrieme puiffance de a de la cinquieme ; & l'on ne peut indiquer plus briévement ni l'un ni l'autre réfultat. Que s'il s'agit de puiffances de la même efpece ou du même degré, il eft clair qu'il n'eft pas néceffaire de les lier par des fignes : $a^3 + a^3$ fait $2a^3$, &c.

181.

Mais la multiplication des puiſſances exige qu'on faſſe attention à différentes choſes.

D'abord quand il s'agit de multiplier par a une puiſſance quelconque de a, on obtient la puiſſance ſuivante, c'eſt-à-dire, celle dont l'expoſant eſt d'une unité plus grand. Ainſi a^2, multiplié par a, fait a^3; & a^3, multiplié par a, fait a^4. Et de même, quand il s'agit de multiplier par a les puiſſances de ce nombre qui ont des expoſans négatifs, on ne fait qu'ajouter 1 à l'expoſant. Ainſi a^{-1} multiplié par a produit a^0 ou 1; ce qui eſt d'autant plus évident, que a^{-1} eſt égal à $\frac{1}{a}$, & que le produit de a par $\frac{1}{a}$ étant $\frac{a}{a}$, il eſt par conſéquent égal à 1. Par des raiſons ſemblables a^{-2}, multiplié par a, fait a^{-1} ou $\frac{1}{a}$; & a^{-10}, multiplié par a, donne a^{-9}, & ainſi de ſuite.

182.

Enſuite, s'il eſt queſtion de multiplier une puiſſance de a par aa ou par la deuxieme puiſſance, je dis que l'expoſant devient plus grand de 2. Ainſi le produit de a^2 par a^2 eſt a^4; celui de a^2 par a^3 eſt a^5; celui de a^4 par a^2 eſt a^6; & plus généralement encore, a^n multiplié par a^2 fait a^{n+2}. Pour ce qui eſt des expoſans négatifs, on aura a^1 ou a pour le produit de a^{-1} par a^2; car a^{-1} étant égal à $\frac{1}{a}$, c'eſt comme ſi l'on avoit à diviſer aa par a; par conſéquent le produit cherché eſt $\frac{aa}{a}$ ou a. De même a^{-2}, multiplié par a^2, fait a^0 ou 1; & a^{-3}, multiplié par a^2, fait a^{-1}.

183.

Il n'eſt pas moins évident que, pour multiplier une puiſſance quelconque de a par a^3, il faut en augmenter l'expoſant de trois unités; & que par conſéquent le produit de a^n par a^3 eſt a^{n+3}. Et toutes les fois

donc qu'il s'agit de multiplier enſemble deux puiſſances de a, on voit que le produit ſera de même une puiſſance de a, & tel que ſon expoſant ſera la ſomme de ceux des deux puiſſances données. Par exemple, a^4 multiplié par a^5 ſera a^9, & a^{12} multiplié par a^7 ſera a^{19}, &c.

184.

En partant de-là on peut déterminer aſſez facilement des puiſſances très-élevées. Pour trouver, par exemple, la vingt-quatrieme puiſſance de 2, je multiplie la douzieme puiſſance par la douzieme puiſſance, parce que 2^{24} eſt autant que 2^{12} multiplié par 2^{12}. Or nous avons vu plus haut que 2^{12} fait 4096; je dis donc que c'eſt le nombre 16777216, ou le produit de 4096 par 4096, qui exprime la puiſſance cherchée 2^{24}.

185.

Paſſons à la diviſion. Nous remarquerons en premier lieu, que pour diviſer une

puiſſance de a par a, il faut ſouſtraire 1 de l'expoſant, ou le diminuer de l'unité. Ainſi a^5, diviſé par a, fait a^4; a^0 ou 1, diviſé par a, eſt autant que a^{-1} ou $\frac{1}{a}$; a^{-3}, diviſé par a, fait a^{-4}.

186.

Si c'eſt par a^2 qu'il faut diviſer une puiſſance donnée de a, il faudra diminuer l'expoſant de 2; & ſi c'eſt par a^3, il faut ſouſtraire trois unités de l'expoſant de la puiſſance propoſée. Ainſi en général, quelque puiſſance de a que ce ſoit qu'il s'agiſſe de diviſer par une autre puiſſance quelconque de a, la regle eſt toujours de ſouſtraire l'expoſant de la ſeconde de l'expoſant de la premiere de ces puiſſances. C'eſt ainſi que a^{15}, diviſé par a^7, donnera a^8; que a^6, diviſé par a^7, donnera a^{-1}; & que a^{-3}, diviſé par a^4, donnera a^{-7}.

187.

Par ce que nous avons dit plus haut, il eſt facile de comprendre comment on

doit trouver les puissances des puissances; & que cela se fait par la multiplication. Quand on cherche, par exemple, le quarré ou la seconde puissance de a^3, on trouve a^6; & de la même maniere on trouve a^{12} pour la troisieme puissance, ou le cube de a^4; on voit que pour prendre le quarré d'une puissance, il n'y a qu'à doubler son exposant; que pour en prendre le cube, il faut tripler cet exposant, & ainsi de suite. Le quarré de a^n est a^{2n}; le cube de a^n est a^{3n}; la septieme puissance de a^n est a^{7n}, &c.

188.

Le quarré de a^2, ou le quarré du quarré de a étant a^4, on voit pourquoi on nomme la quatrieme puissance, le *bi-quarré* ou le *quarré-quarré*.

Le quarré de a^3 est a^6, c'est ce qui a fait donner à la sixieme puissance le nom de *quarré-cube*.

Enfin le cube de a^3 étant a^9, on appelle les neuviemes puissances *cubes-cubes*. On n'a pas introduit d'autres dénominations de cette espece pour les puissances, & même les deux dernieres ne sont pas fort en usage.

CHAPITRE XVIII.

Des Racines relativement à toutes les Puissances en général.

189.

PUISQUE la racine quarrée d'un nombre donné est un nombre tel que son quarré est égal à ce nombre donné, & que la racine cubique d'un nombre donné est un nombre tel que son cube est égal à ce nombre donné; il s'ensuit qu'étant donné un nombre quelconque, on peut toujours en indiquer des racines telles que leur quatrieme ou leur cinquieme puissance, ou quelque autre à volonté, soit égale au nombre donné. Afin de distinguer mieux ces différentes especes de racines, nous

nommerons la racine quarrée, *racine deuxieme*; la racine cubique, *racine troiſieme*; parce que d'après cette dénomination on peut nommer *racine quatrieme*, celle dont le quarré-quarré eſt égal à un nombre donné; & *racine cinquieme*, celle dont la cinquieme puiſſance eſt égale à un nombre donné, &c.

190.

De même que la racine quarrée ou deuxieme s'indique par le ſigne $\sqrt{}$, & la racine cubique ou troiſieme, par le ſigne $\sqrt[3]{}$, on repréſente la racine quatrieme par le ſigne $\sqrt[4]{}$; la racine cinquieme par le ſigne $\sqrt[5]{}$ & ainſi de ſuite. Il eſt clair que ſuivant cette façon de s'exprimer, le ſigne de la racine quarrée devroit être $\sqrt[2]{}$. Mais comme de toutes les racines c'eſt celle-ci qui ſe préſente le plus ſouvent, on eſt convenu, pour abréger, d'omettre le nombre 2 du ſigne de cette racine. Ainſi, quand dans un ſigne

radical il ne ſe trouve pas de nombre, cela ſuppoſe toujours que c'eſt la racine quarrée qu'on a voulu indiquer.

191.

Nous allons, pour nous expliquer encore mieux, mettre ſous les yeux les différentes racines du nombre a, avec leurs ſignifications.

$\sqrt{a}$ eſt la II.e racine de a,
$\sqrt[3]{a}$ —— III.e —— a,
$\sqrt[4]{a}$ —— IV.e —— a,
$\sqrt[5]{a}$ —— V.e —— a,
$\sqrt[6]{a}$ —— VI.e —— a,
& ainſi de ſuite.

De ſorte que réciproquement:
la II.e puiſſance de $\sqrt{a}$ eſt égale à a,
la III.e —— $\sqrt[3]{a}$ —— a,
la IV.e —— $\sqrt[4]{a}$ —— a,
la V.e —— $\sqrt[5]{a}$ —— a,
la VI.e —— $\sqrt[6]{a}$ —— a,
& ainſi de ſuite.

192.

Que le nombre *a* ſoit donc grand ou petit, on comprend quel ſens on doit attacher à toutes ces racines de différens degrés.

Il faut remarquer auſſi, que ſi l'on prend pour *a* l'unité, toutes ces racines reſtent conſtamment 1; parce que toutes les puiſſances de 1 ont pour valeur l'unité. Que ſi le nombre *a* eſt plus grand que 1, toutes ſes racines auſſi ſurpaſſeront l'unité. Enfin, que ſi ce nombre eſt plus petit que 1, toutes ſes racines auſſi ſeront moindres que l'unité.

193.

Quand le nombre *a* eſt poſitif, on comprend, par ce qui a été dit plus haut des racines quarrées & cubiques, que toutes les autres racines auſſi pourront être indiquées réellement, & ſeront des nombres réels & poſſibles.

Mais ſi le nombre *a* eſt négatif, il faut que ſes racines, deuxieme, quatrieme, ſixieme, & en général toutes celles d'un degré pair, deviennent des nombres impoſſibles ou imaginaires; parce que toutes les puiſſances d'un degré pair, tant des nombres poſitifs que des nombres négatifs, ſont toujours affectées du ſigne *plus*. Au lieu que les racines troiſieme, cinquieme, ſeptieme, & en général toutes les racines impaires, deviennent négatives, mais rationnelles; parce que les puiſſances impaires de nombres négatifs, ſont négatives de même.

194.

Enfin nous avons là auſſi une ſource inépuiſable de nouvelles eſpeces de quantités ſourdes ou irrationnelles; car toutes les fois que le nombre *a* n'eſt pas réellement une puiſſance telle que le ſigne radical en indique une, ou ſemble en requérir une, il eſt impoſſible auſſi d'exprimer cette racine,

ſoit en nombres entiers, ſoit par des fractions, & par conſéquent cette racine doit alors être rangée dans la claſſe des nombres qu'on nomme irrationnels.

CHAPITRE XIX.

De la maniere d'indiquer les Nombres irrationnels par des expoſans fractionnaires.

195.

Nous venons de faire voir dans le chapitre précédent, que le quarré d'une puiſſance quelconque ſe trouve en doublant l'expoſant de cette puiſſance, & qu'en général le quarré ou la ſeconde puiſſance de a^n eſt a^{2n}. Il s'enſuit de-là l'inverſe, ſavoir, que la racine quarrée de la puiſſance a^{2n} eſt a^n, & qu'on la trouve en prenant la moitié de l'expoſant de cette puiſſance, ou en diviſant cet expoſant par 2.

196.

Ainſi la racine quarrée de a^2 eſt a^1; celle de a^4 eſt a^2; celle de a^6 eſt a^3; & ainſi de ſuite. Et comme c'eſt-là une vérité générale, on voit que la racine quarrée de a^3 doit néceſſairement être $a^{\frac{3}{2}}$, & que celle de a^5 eſt $a^{\frac{5}{2}}$. Par conſéquent on aura de même $a^{\frac{1}{2}}$ pour la racine quarrée de a^1; d'où l'on voit que $a^{\frac{1}{2}}$ eſt autant que $\sqrt{a}$; & cette nouvelle maniere d'indiquer la racine quarrée, demande qu'on y faſſe attention.

197.

Nous avons montré auſſi que pour trouver le cube d'une puiſſance comme a^n, il falloit multiplier ſon expoſant par 3, & que par conſéquent ce cube étoit a^{3n}.

Ainſi, quand il s'agit de trouver en rétrogradant la racine troiſieme, ou cubique, de la puiſſance a^{3n}, on ne fait que diviſer cet expoſant par 3, & on conclut

que la racine cherchée est a^n. Par conséquent a^1, ou a, est la racine cubique de a^3 ; a^2 est celle de a^6 ; a^3 est celle de a^9, & ainsi de suite.

198.

Rien n'empêche d'appliquer ces principes aux cas où l'exposant ne seroit pas divisible par 3, & de conclure que la racine cubique de a^2 est $a^{\frac{2}{3}}$, & que celle de a^4 est $a^{\frac{4}{3}}$ ou $a^{1\frac{1}{3}}$. Par conséquent aussi la racine troisieme, ou cubique, de a même, ou bien de a^1, doit être $a^{\frac{1}{3}}$. D'où l'on voit que $a^{\frac{1}{3}}$ est la même chose que $\sqrt[3]{a}$.

199.

Il en est de même des racines d'un degré plus élevé. La racine quatrieme de a sera $a^{\frac{1}{4}}$, laquelle expression signifie donc autant que $\sqrt[4]{a}$. La racine cinquieme de a sera $a^{\frac{1}{5}}$, ce qui est par conséquent l'équivalent de $\sqrt[5]{a}$; & ces vérités s'étendent sans difficulté à toutes les racines d'un degré plus élevé.

200.

On pourroit donc se passer entiérement des signes radicaux usités, & employer à leur place les exposans fractionnaires que nous venons d'expliquer ; cependant comme on est accoutumé à ces signes depuis long-temps, & qu'on les rencontre dans tous les écrits analytiques, on auroit tort de vouloir les bannir tout-à-fait du calcul. Mais on a raison aussi de se servir beaucoup, comme l'on fait aujourd'hui, de l'autre maniere, parce qu'elle répond avec évidence à la nature de la chose. En effet, on voit sur le champ que $a^{\frac{1}{2}}$ est la racine quarrée de a, parce qu'on sait que le quarré de $a^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire, $a^{\frac{1}{2}}$ multiplié par $a^{\frac{1}{2}}$, est égal à a^1 ou a.

201.

On voit par ce qui a précédé, comment on doit interpréter tous les autres exposans rompus qui peuvent se présenter. Que si

l'on a, par exemple, $a^{\frac{4}{3}}$, cela ſignifie qu'il faut prendre d'abord la quatrieme puiſſance de a, & en extraire enſuite la racine cubique ou troiſieme ; de ſorte que $a^{\frac{4}{3}}$ eſt autant que, ſuivant la façon ordinaire, $\sqrt[3]{a^4}$. Que pour trouver la valeur de $a^{\frac{3}{4}}$, il faut prendre d'abord le cube ou la troiſieme puiſſance de a, qui eſt a^3, & en extraire après cela la racine quatrieme ; de façon que $a^{\frac{3}{4}}$ eſt la même choſe que $\sqrt[4]{a^3}$. De même $a^{\frac{4}{5}}$ eſt autant que $\sqrt[5]{a^4}$ &c.

202.

Quand la fraction qui repréſente l'expoſant ſurpaſſe l'unité, on peut indiquer encore d'une autre maniere la valeur de la quantité propoſée. Suppoſez que ce ſoit $a^{\frac{5}{2}}$; cette quantité équivaut à $a^{2\frac{1}{2}}$, qui eſt le produit de a^2 par $a^{\frac{1}{2}}$. Or $a^{\frac{1}{2}}$ étant égal à $\sqrt{a}$, on voit que $a^{\frac{5}{2}}$ eſt autant que $a^2\sqrt{a}$. De même $a^{\frac{10}{3}}$ ou $a^{3\frac{1}{3}}$ eſt autant que $a^3\sqrt[3]{a}$; & $a^{\frac{15}{4}}$, c'eſt-à-dire $a^{3\frac{3}{4}}$, ſignifie

$a^3\sqrt[4]{a^3}$. Ces exemples ſuffiſent pour faire concevoir la grande utilité des expoſans fractionnaires.

203.

Leur uſage s'étend auſſi aux nombres rompus : Qu'on ait $\frac{1}{\sqrt{a}}$, on ſait que cette quantité eſt égale à $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$; or nous avons vu plus haut qu'une fraction de la forme $\frac{1}{a^n}$ peut s'exprimer par a^{-n} ; ainſi pour $\frac{1}{\sqrt{a}}$ on peut ſe ſervir de l'expreſſion $a^{-\frac{1}{2}}$. De même $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ eſt autant que $a^{-\frac{1}{3}}$. Soit propoſée encore la quantité $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$; qu'on la transforme en celle-ci : $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$, qui eſt le produit de a^2 par $a^{-\frac{3}{4}}$; or ce produit équivaut à $a^{\frac{5}{4}}$ ou à $a^{1\frac{1}{4}}$, ou enfin à $a\sqrt[4]{a}$. L'uſage rendra faciles de ſemblables réductions.

204.

Enfin nous obſerverons que chaque racine peut ſe repréſenter d'un grand nombre de manieres. Car $\sqrt{a}$ étant la même choſe que $a^{\frac{1}{2}}$, & $\frac{1}{2}$ pouvant être transformé en toutes ces fractions, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$ &c. il eſt clair que $\sqrt{a}$ eſt autant que $\sqrt[4]{a^2}$, & que $\sqrt[6]{a^3}$, & que $\sqrt[8]{a^4}$, & ainſi de ſuite. Pareillement, $\sqrt[3]{a}$ qui ſignifie $a^{\frac{1}{3}}$, ſera égale à $\sqrt[6]{a^2}$ & à $\sqrt[9]{a^3}$, & à $\sqrt[12]{a^4}$. Et l'on voit de même que le nombre a, ou a^1, pourroit s'indiquer par les expreſſions radicales qui ſuivent:

$$\sqrt[2]{a^2},\ \sqrt[3]{a^3},\ \sqrt[4]{a^4},\ \sqrt[5]{a^5},\ \&c.$$

205.

Cette propriété eſt d'un bon uſage dans la multiplication & dans la diviſion. Car ſi l'on a, par exemple, à multiplier $\sqrt[2]{a}$ par $\sqrt[3]{a}$, on écrit $\sqrt[6]{a^3}$ pour $\sqrt[2]{a}$, & $\sqrt[6]{a^2}$ au lieu de $\sqrt[3]{a}$; de cette façon on obtient de part & d'autre le même ſigne radical, & la multiplication ſe faiſant maintenant, donne le produit $\sqrt[6]{a^5}$. Le même réſultat ſe déduit de ce que $a^{\frac{1}{2}}$ multiplié par $a^{\frac{1}{3}}$ fait $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$; car $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ eſt $\frac{5}{6}$, & par conſéquent le produit en queſtion eſt en effet $a^{\frac{5}{6}}$ ou $\sqrt[6]{a^5}$.

S'il s'agiſſoit de diviſer $\sqrt[2]{a}$ ou $a^{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt[3]{a}$ ou $a^{\frac{1}{3}}$, on auroit pour quotient $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, ou $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$, c'eſt-à-dire $a^{\frac{1}{6}}$ ou $\sqrt[6]{a}$.

CHAPITRE XX.

Qui traite en général des différentes manieres de calculer & de leur liaiſon.

206.

Nous avons expoſé juſqu'ici différentes opérations de calcul: l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication & la Diviſion;

l'élévation des Puiſſances, & enfin l'extraction des Racines. Il ne ſera donc pas hors de propos de remonter à l'origine de ces différentes manieres de calculer & d'expliquer la liaiſon qui eſt entr'elles, afin qu'on puiſſe s'aſſurer s'il eſt poſſible ou non qu'il exiſte encore d'autres opérations de cette eſpece. Cette recherche ne pourra que répandre plus de jour ſur les matieres que nous avons traitées.

Nous nous ſervirons dans ce deſſein d'un nouveau ſigne qu'on peut employer à la place de l'expreſſion ſi ſouvent répétée, *eſt autant que*; ce ſigne eſt celui-ci $=$, & ſe prononce *eſt égal.* Ainſi quand j'écris $a = b$, cela ſignifie que a eſt autant que b, ou que a eſt égal à b: de même, par exemple, $3.5 = 15$.

207.

La premiere façon de calculer qui ſe préſente à notre eſprit, eſt ſans contredit l'addition, par laquelle on ajoute deux nombres enſemble & qu'on trouve leur

ſomme. Soient donc a & b ces deux nombres propoſés, & qu'on indique leur ſomme par la lettre c, on aura $a + b = c$. Ainſi quand on connoît les deux nombres a & b, l'addition enſeigne à trouver moyennant cela le nombre c.

208.

Conſervons cette comparaiſon $a + b = c$, mais renverſons la queſtion en demandant, comment, les nombres a & c étant connus, on doit trouver le nombre b.

Il s'agit donc de ſavoir quel nombre il faut ajouter au nombre a, pour qu'il en réſulte ce nombre c. Soit, par exemple, $a = 3$ & $c = 8$; de ſorte qu'il faudroit que l'on eût $3 + b = 8$; il eſt clair qu'on trouvera b en ſouſtrayant 3 de 8. Ainſi en général, pour trouver b, il faudra ſouſtraire a de c, d'où provient $b = c - a$; car en ajoutant de nouveau a de part & d'autre, on a $b + a = c - a + a$, c'eſt-à-dire $= c$, comme on l'avoit ſuppoſé.

Et voilà donc l'origine de la ſouſtraction.

209.

Ainſi la ſouſtraction a lieu, quand on renverſe la queſtion qui donne lieu à l'addition. Or il peut arriver que le nombre qu'il s'agit de ſouſtraire ſoit plus grand que celui duquel il faut le ſouſtraire; comme, par exemple, s'il s'agiſſoit de ſouſtraire 9 de 5; ce cas eſt donc propre à nous fournir l'idée d'une nouvelle eſpece de nombres, qu'on nomme nombres négatifs, parce que $5 - 9 = -4$.

210.

Quand pluſieurs nombres qui doivent être ajoutés enſemble ſont égaux entr'eux, leur ſomme ſe trouve par la multiplication, & ſe nomme un produit. Ainſi ab ſignifie le produit qui provient de la multiplication de a par b, ou bien de ce qu'on a ajouté enſemble un nombre a de nombres b. Si nous indiquons à préſent ce produit par la lettre c, nous aurons $ab = c$; & la multiplication nous apprend comment, les

nombres a & b étant connus, l'on doit déterminer par-là le nombre c.

211.

Propoſons-nous maintenant la queſtion ſuivante: Les nombres a & c étant connus, trouver le nombre b. Soit, par exemple, $a = 3$ & $c = 15$, de façon que $3b = 15$, & qu'on demande par quel nombre il faut multiplier 3, pour qu'il nous vienne 15; c'eſt à quoi revient la queſtion propoſée. Or c'eſt ici le cas de la diviſion: le nombre qu'on demande ſe trouve en diviſant 15 par 3, & en général le nombre b ſe trouve donc en diviſant c par a; d'où il réſulte par conſéquent l'équation $b = \frac{c}{a}$.

212.

Or, comme il arrive ſouvent que le nombre c ne peut être diviſé réellement par le nombre a, & que cependant la lettre b doit avoir une valeur déterminée, il ſe préſente encore une nouvelle eſpece

de nombres ; ce ſont les fractions. Par exemple, en ſuppoſant $a=4$, $c=3$, de façon que $4b=3$, on voit bien que b ne ſauroit être un nombre entier, mais que ce ſera une fraction, & qu'on aura $b=\frac{3}{4}$.

213.

Nous avons vu que la multiplication provient de l'addition, c'eſt-à-dire, de ce qu'on ajoute enſemble pluſieurs quantités égales. Si nous allons à préſent plus loin, nous voyons que c'eſt à la multiplication de pluſieurs quantités égales entr'elles que les puiſſances doivent leur origine. Ces puiſſances ſe repréſentent d'une maniere générale par la formule a^b, par laquelle on entend que le nombre a doit être multiplié autant de fois par lui-même que le nombre b l'indique. Et l'on ſait, par ce qui a précédé, qu'ici a eſt ce qu'on nomme la racine, b l'expoſant, & a^b la puiſſance.

214.

Si nous indiquons maintenant cette puiſſance même par la lettre c, nous avons $a^b=c$, une équation par conſéquent dans laquelle ſe préſentent trois lettres a, b, c. Or on montre dans la théorie des puiſſances, comment une racine a avec l'expoſant b étant donnés, on doit trouver la puiſſance elle-même, c'eſt-à-dire, la lettre c. Soit, par exemple, $a=5$, & $b=3$, en ſorte que $c=5^3$: on voit qu'il faut prendre la troiſieme puiſſance de 5, qui eſt 125, & qu'ainſi $c=125$.

215.

On a vu comment, par le moyen de la racine a & de l'expoſant b, on doit déterminer la puiſſance c ; mais ſi l'on veut à préſent changer ou renverſer la queſtion, comme on a déjà fait, on verra que cela peut ſe faire de deux manieres, & qu'on a deux cas différens à conſidérer. En effet

ſi, deux de ces trois nombres a, b, c étant donnés, il s'agit de trouver le troiſieme, on voit auſſi-tôt que cette queſtion admet trois ſuppoſitions différentes, & par conſéquent trois ſolutions. Nous venons de conſidérer le cas où a & b étoient les données, nous pouvons donc ſuppoſer encore que c & a, ou bien que c & b ſoient connus & qu'il faille déterminer la troiſieme lettre. Remarquons donc, avant que d'aller plus loin, une différence aſſez eſſentielle entre l'élévation des puiſſances & les deux opérations qui conduiſent à celle-là. Lorſque dans l'addition nous avons renverſé la queſtion, nous n'avons pu le faire que d'une ſeule maniere; il étoit indifférent de prendre c & a ou c & b pour données, parce qu'il eſt indifférent d'écrire $a+b$ ou d'écrire $b+a$. Il en étoit de même de la multiplication; on pouvoit pareillement prendre les lettres a & b l'une pour l'autre, l'équation $ab=c$ étant exactement la même que $ba=c$.

Dans le calcul des puiſſances, au contraire la même choſe n'a pas lieu, & on ne peut point du tout écrire b^a au lieu de a^b. Un ſeul exemple ſuffit pour s'en convaincre : Soit $a=5$, & $b=3$; on a $a^b=5^3=125$. Mais $b^a=3^5=243$: deux réſultats très-différens.

216.

Il eſt donc clair qu'on peut réellement ſe propoſer encore deux queſtions : l'une, de trouver la racine a par le moyen de la puiſſance donnée c, & de l'expoſant b. L'autre, de trouver l'expoſant b, en ſuppoſant connues la puiſſance c & la racine a.

217.

On peut dire que la premiere de ces queſtions a été réſolue dans le chapitre de l'extraction des racines. Car, par exemple, ſi $b=2$ & que $a^2=c$, nous ſavons que cela ſignifie que a eſt un nombre tel que ſon quarré ſoit égal à c, & par conſéquent

que $a=\sqrt[2]{c}$. De même, si $b=3$ & $a^3=c$; on sait qu'il faut que le cube de a soit égal au nombre donné c, & conséquemment que $a=\sqrt[3]{c}$. Il est donc aisé de conclure généralement de-là comment on doit déterminer la lettre a par le moyen des lettres c & b: il faut nécessairement que $a=\sqrt[b]{c}$.

218.

Nous avons aussi déjà fait remarquer la conséquence qui s'ensuit du cas très-fréquent où le nombre donné c n'est pas réellement une puissance; savoir qu'alors la racine cherchée a ne peut s'exprimer ni par des nombres entiers, ni par des fractions. Et comme cette racine doit avoir cependant nécessairement une valeur déterminée, la même remarque nous a conduits à une nouvelle espece de nombres que nous avons dit qu'on nommoit nombres *sourds* ou *irrationnels*, & que nous avons vus se diviser en une infinité d'especes à cause de la

grande diversité des racines. Enfin la même considération nous a appris à connoître l'espece particuliere de nombres, qu'on a nommée *nombres imaginaires*.

219.

Il nous reste à considérer la seconde question, qui étoit de déterminer l'exposant par le moyen de la puissance c & de la racine a, toutes deux connues. Cette question, qui ne s'étoit pas encore présentée, nous conduira à l'importante théorie des Logarithmes, dont l'usage est si étendu dans toutes les Mathématiques, qu'il y a peu de long calcul dont on puisse venir à bout sans son secours. On verra dans le chapitre suivant, pour lequel nous réservons cette théorie, qu'elle nous fait parvenir à une espece de nombres encore tout-à fait nouvelle, & qu'on ne peut pas même compter parmi les nombres irrationnels dont nous avons parlé.

CHAPITRE XXI.

Des Logarithmes en général.

220.

EN reprenant l'équation $a^b = c$, nous commencerons par remarquer que dans la doctrine des logarithmes on adopte pour la racine a un certain nombre pris à volonté, & qu'on suppose que cette racine conserve invariablement la valeur adoptée. Cela posé, on prend l'exposant b tel, que la puissance a^b devienne égale à un nombre donné c, & c'est alors cet exposant b qu'on dit être le *logarithme* du nombre c. Nous nous servirons, pour exprimer cette signification, de la lettre L. ou des lettres initiales *log.* Ainsi en écrivant $b = L.c$, ou $b = log.c$, on indique que b est égale au logarithme du nombre c, ou bien que le logarithme de c est b.

221.

On voit donc que la valeur de la racine a une fois établie, le logarithme d'un nombre quelconque c n'est autre chose que l'exposant de la puissance de a, qui est égale à c. C'est ainsi que c étant $= a^b$, b est le logarithme de la puissance a^b. Si l'on suppose à présent que $b = 1$, on a 1 pour le logarithme de a^1, & par conséquent $L.a = 1$. Si l'on suppose $b = 2$, on a 2 pour le logarithme de a^2; c'est-à-dire, $L.a^2 = 2$. On peut obtenir de la même maniere, $L.a^3 = 3$; $L.a^4 = 4$; $L.a^5 = 5$, & ainsi de suite.

222.

Si l'on fait $b = 0$, on voit que 0 sera le logarithme de a^0: or $a^0 = 1$; par conséquent $L.1 = 0$, quelque valeur qu'on donne à la racine a.

Que si l'on suppose $b = -1$, ce sera -1 qui sera le logarithme de a^{-1}. Or

$a^{-1} = \frac{1}{a}$; on a donc L. $\frac{1}{a} = -1$. On aura pareillement L. $\frac{1}{a^2} = -2$; L. $\frac{1}{a^3} = -3$; L. $\frac{1}{a^4} = -4$, &c.

223.

Il eſt donc évident comment on peut indiquer les logarithmes de toutes les puiſſances de la racine a, & même ceux de fractions qui ont pour numérateur l'unité, & pour dénominateur une puiſſance de a. On voit auſſi que dans tous ces cas les logarithmes ſont des nombres entiers; mais il faut obſerver que ſi b étoit une fraction, elle ſeroit le logarithme d'un nombre irrationnel. Car ſi l'on ſuppoſe, par exemple, $b = \frac{1}{2}$, il ſuit que $\frac{1}{2}$ eſt le logarithme de $a^{\frac{1}{2}}$ ou de $\sqrt{a}$; par conſéquent on a L. $\sqrt{a} = \frac{1}{2}$. On trouvera de même L. $\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$; L. $\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, &c.

224.

Mais s'il s'agit de trouver le logarithme d'un autre nombre c, on voit aiſément qu'il ne peut être ni un nombre entier, ni une fraction. Cependant il faut qu'il exiſte un expoſant b, tel que la puiſſance a^b devienne égale au nombre propoſé: on a donc $b =$ L. c. Donc généralement $a^{L.c} = c$.

225.

Conſidérons à préſent un autre nombre d, dont le logarithme ait été indiqué d'une maniere ſemblable par L. d; de façon que $a^{L.d} = d$. Si nous multiplions cette formule par la précédente $a^{L.c} = c$, nous aurons $a^{L.c + L.d} = cd$; or l'expoſant eſt toujours le logarithme de la puiſſance; par conſéquent L. c + L. d = L. cd.

Que ſi au lieu de multiplier nous diviſions la premiere formule par la ſeconde, nous obtiendrions $a^{L.c - L.d} = \frac{c}{d}$; & par conſéquent L. c − L. d = L. $\frac{c}{d}$.

226.

C'eſt ainſi que nous avons été conduits à la découverte des deux principales propriétés des logarithmes, qui conſiſtent dans les équations $L.c + L.d = L.cd$, & $L.c - L.d = L.\frac{c}{d}$. La premiere de ces équations nous apprend que le logarithme d'un produit, comme cd, ſe trouve en ajoutant enſemble les logarithmes des facteurs. La ſeconde nous indique la propriété, que le logarithme d'une fraction peut ſe déterminer en ſouſtrayant le logarithme du dénominateur de celui du numérateur.

227.

Il s'enſuit donc de-là, que quand il s'agit de multiplier ou de diviſer deux nombres l'un par l'autre, on n'a beſoin que d'ajouter ou de ſouſtraire leurs logarithmes. Et c'eſt-là préciſément en quoi conſiſte l'utilité inſigne des logarithmes dans le calcul.

Car qui ne voit qu'il eſt incomparablement plus aiſé d'ajouter ou de ſouſtraire des nombres, que d'en multiplier ou d'en diviſer, ſur-tout quand la queſtion roule ſur de grands nombres.

228.

Les logarithmes offrent des avantages encore plus grands, dans le calcul des puiſſances & dans l'extraction des racines. Car ſi $d = c$, on a par la premiere propriété $L.c + L.c = L.cc$; par conſéquent $L.cc = 2L.c$. On obtient pareillement $L.c^3 = 3L.c$; $L.c^4 = 4L.c$; & en général $L.c^n = nL.c$.

Si l'on ſubſtitue maintenant à n des nombres rompus, on aura, par exemple, $L.c^{\frac{1}{2}}$, c'eſt-à-dire, $L.\sqrt{c} = \frac{1}{2}L.c$.

Enfin, ſi l'on ſuppoſe que n repréſente des nombres négatifs, on aura $L.c^{-1}$ ou $L.\frac{1}{c} = -L.c$; $L.c^{-2}$ ou $L.\frac{1}{cc} = -2L.c$, & ainſi de ſuite. Cela ſuit non-ſeulement de l'équation $L.c^n = nL.c$, mais auſſi de

ce que, comme nous l'avons vu plus haut, L. $1=0$.

229.

Si l'on a donc des tables dans lesquelles les logarithmes se trouvent calculés pour tous les nombres, on a, comme l'on voit, un puissant secours pour venir facilement à bout de calculs très-prolixes, qui exigeroient beaucoup de multiplications, de divisions, d'élévations de puissances & d'extractions de racines. Car on trouveroit dans ces tables non-seulement les logarithmes pour tous les nombres, mais aussi les nombres pour les logarithmes. Par exemple, s'il est question de chercher la racine quarrée du nombre c, on cherche d'abord le logarithme de c, qui est L. c, & prenant ensuite la moitié de ce logarithme, ou $\frac{1}{2}$L. c, on sait qu'on a le logarithme de la racine quarrée qu'on cherche. On n'a donc qu'à voir dans les tables quel nombre répond à ce logarithme, on est assuré qu'il exprime la racine cherchée.

230.

Nous avons vu plus haut que les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. c'est-à-dire tous les nombres positifs, sont des logarithmes de la racine a & de ses puissances positives, & par conséquent des logarithmes de nombres plus grands que l'unité. Et au contraire que les nombres négatifs, comme -1, -2, &c. sont les logarithmes des fractions $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ &c. qui sont plus petites que l'unité, mais cependant encore plus grandes que rien.

Il suit de-là que si le logarithme est positif, le nombre est toujours plus grand que l'unité; mais que si le logarithme est négatif, le nombre est toujours plus petit que 1, & pourtant plus grand que zéro. Par conséquent on ne sauroit indiquer des logarithmes de nombres négatifs, & il faut en conclure que les logarithmes des nombres négatifs sont impossibles, & qu'ils appartiennent à la classe des quantités imaginaires.

231.

Il sera bon, afin d'éclaircir tout cela encore mieux, d'adopter un nombre déterminé pour la racine a, & nous choisissons celui-là même sur lequel on a fondé les tables logarithmiques ordinaires. C'est le nombre 10; on lui a donné la préférence, parce qu'il sert déjà de base à toute notre Arithmétique. Mais on voit facilement que tout autre nombre, pourvu qu'il fût plus grand que l'unité, pourroit servir au même usage. Quant à la raison pourquoi on ne pourroit pas supposer $a=1$, elle est claire; toutes les puissances a^b seroient constamment égales à l'unité, & ne pourroient jamais devenir égales à un autre nombre donné c.

CHAPITRE XXII.

Des Tables de Logarithmes usitées.

232.

DANS ces tables on part de la supposition, comme nous venons de le dire, que la racine $a=10$. Ainsi le logarithme d'un nombre quelconque c est l'exposant auquel il faut élever le nombre 10, pour qu'il en résulte une puissance égale au nombre c. Ou bien, si l'on désigne le logarithme de c par $L.c$, on aura toujours $10^{L.c}=c$.

233.

Nous avons déjà fait remarquer que le logarithme du nombre 1 est toujours 0; & en effet on a $10^0=1$; par conséquent:
$L.1=0$; $L.10=1$; $L.100=2$; $L.1000=3$; $L.10000=4$; $L.100000=5$; $L.1000000=6$.

De plus

$L.\frac{1}{10}=-1$; $L.\frac{1}{100}=-2$; $L.\frac{1}{1000}=-3$;
$L.\frac{1}{10000}=-4$; $L.\frac{1}{100000}=-5$;
$L.\frac{1}{1000000}=-6$.

234.

Ces logarithmes des nombres principaux se déterminent, comme on voit, sans aucune peine. Mais il est d'autant plus difficile de trouver les logarithmes de tous les autres nombres, & cependant il est nécessaire qu'on les insere dans les tables. Ce n'est pas ici encore le lieu de donner toutes les instructions requises pour cette recherche, nous nous contenterons pour le présent de voir en général ce qu'elle exige.

235.

D'abord, puisque $L.1=0$ & $L.10=1$, il est évident que les logarithmes de tous les nombres entre 1 & 10 doivent être compris entre 0 & 1, & être par conséquent plus grands que 0 & plus petits que 1.

Nous n'avons qu'à considérer le seul nombre 2; il est certain que son logarithme est plus grand que 0, & cependant plus petit que l'unité; & si nous désignons ce logarithme par la lettre x, en sorte que $L.2=x$, il faut que la valeur de cette lettre soit telle qu'on ait exactement $10^x=2$.

Il est facile aussi de se convaincre que x doit être beaucoup plus petit que $\frac{1}{2}$ ou ce qui revient au même, que $10^{\frac{1}{2}}$ est plus grand que 2. Car si nous prenons de part & d'autre les quarrés, on trouve le quarré de $10^{\frac{1}{2}}=10^1$ & celui de $2=4$; or ce dernier est de beaucoup moindre que le premier. De même $\frac{1}{3}$ est encore une valeur trop grande pour x, c'est-à-dire que $10^{\frac{1}{3}}$ est plus grand que 2. Car le cube de $10^{\frac{1}{3}}$ est 10, & celui de 2 ne fait que 8. Mais au contraire en ne faisant x que de $\frac{1}{4}$ on lui donneroit une valeur trop petite, parce que la quatrieme puissance de $10^{\frac{1}{4}}$ étant 10 & celle de 2 étant 16, il est clair que $10^{\frac{1}{4}}$ est moindre que 2.

On voit que x ou le L. 2 est plus petit que $\frac{1}{3}$, & cependant plus grand que $\frac{1}{4}$. On peut déterminer de la même maniere à

l'égard de toute fraction contenue entre $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{3}$, si elle est trop grande ou si elle est trop petite. En tentant, par exemple, avec $\frac{2}{7}$, qui est une fraction moindre que $\frac{1}{3}$, & plus grande que $\frac{1}{4}$, il faudroit que $10^{\frac{2}{7}}$, ou $10^{\frac{2}{7}}$, fût $= 2$; ou bien que la septieme puissance de $10^{\frac{2}{7}}$, c'est-à-dire 10^2 ou 100, fût égale à la septieme puissance de 2; or celle-ci est $= 128$, & par conséquent plus grande que celle-là. Nous concluons donc de-là que $10^{\frac{2}{7}}$ est aussi moindre que 2, & qu'ainsi $\frac{2}{7}$ est moindre que L. 2, & que L. 2 qui s'étoit trouvé plus petit que $\frac{1}{3}$ est cependant plus grand que $\frac{2}{7}$.

Essayons encore une autre fraction qui soit, en conséquence de ce que nous venons de trouver, comprise entre $\frac{2}{7}$ & $\frac{1}{3}$. Une telle fraction est $\frac{3}{10}$, & il s'agit donc de voir si $10^{\frac{3}{10}} = 2$; si cela est, les dixiemes puissances de ces deux nombres sont aussi égales entr'elles; or la dixieme puissance de $10^{\frac{3}{10}}$ est $10^3 = 1000$; & la dixieme

puissance de 2 est $= 1024$; il faut donc conclure que $10^{\frac{3}{10}}$ n'est pas $= 2$, que $\frac{3}{10}$ est une fraction trop petite pour produire cette égalité, & que le L. 2, quoique plus petit que $\frac{1}{3}$ est cependant plus grand que $\frac{3}{10}$.

236.

Cette considération sert à nous faire voir que L. 2 a une grandeur déterminée, puisque nous savons que ce logarithme est certainement plus grand que $\frac{3}{10}$ & plus petit que $\frac{1}{3}$. Nous ne pouvons pas aller plus loin pour le présent, & puisque nous ignorons encore la vraie valeur de ce logarithme, nous l'indiquerons par x, en sorte que L. $2 = x$; & nous montrerons comment, si elle étoit connue, on pourroit en déduire les logarithmes d'une infinité d'autres nombres. Nous nous servirons pour cet effet de l'équation rapportée plus haut L. $cd =$ L. $c +$ L. d, qui renferme la propriété, que le logarithme d'un produit se

trouve en ajoutant ensemble les logarithmes des facteurs.

237.

D'abord, comme $L.2 = x$, & $L.10 = 1$, nous aurons $L.20 = x + 1$; $L.200 = x + 2$;
$L.2000 = x + 3$; $L.20000 = x + 4$;
& $L.200000 = x + 5$, &c.

238.

De plus, comme $L.c^2 = 2L.c$ & $L.c^3 = 3L.c$
& $L.c^4 = 4L.c$, &c. nous avons
$L.4 = 2x$; $L.8 = 3x$; $L.16 = 4x$; $L.32 = 5x$;
$L.64 = 6x$, &c. & nous trouvons par-là que
$L.40 = 2x + 1$; $L.400 = 2x + 2$;
$L.4000 = 2x + 3$; $L.40000 = 2x + 4$, &c.
$L.80 = 3x + 1$; $L.800 = 3x + 2$;
$L.8000 = 3x + 3$; $L.80000 = 3x + 4$, &c.
$L.160 = 4x + 1$; $L.1600 = 4x + 2$;
$L.16000 = 4x + 3$; $L.160000 = 4x + 4$ &c.

239.

Reprenons aussi l'autre équation fondamentale, $L.\frac{c}{d} = L.c - L.d$, & supposons

$c = 10$, & $d = 2$; puisque $L.10 = 1$ & $L.2 = x$, nous aurons $L.\frac{10}{2}$ ou $L.5 = 1 - x$, & nous déduirons de-là les équations suivantes :

$L.50 = 2 - x$; $L.500 = 3 - x$;
$L.5000 = 4 - x$, &c.
$L.25 = 2 - 2x$; $L.125 = 3 - 3x$;
$L.625 = 4 - 4x$, &c.
$L.250 = 3 - 2x$; $L.2500 = 4 - 2x$;
$L.25000 = 5 - 2x$, &c.
$L.1250 = 4 - 3x$; $L.12500 = 5 - 3x$;
$L.125000 = 6 - 3x$, &c.
$L.6250 = 5 - 4x$; $L.62500 = 6 - 4x$;
$L.625000 = 7 - 4x$, &c.
& ainsi de suite.

240.

Si l'on connoissoit le logarithme de 3, ce seroit encore le moyen de déterminer un nombre prodigieux d'autres logarithmes. En voici quelques preuves, en supposant le L.3 exprimé par la lettre y.

$L.30 = y + 1$; $L.300 = y + 2$;
$L.3000 = y + 3$, &c.

$$L.9 = 2y;\ L.27 = 3y;\ L.81 = 4y;$$
$$L.243 = 5y;\ \&c.$$

On aura auſſi

$$L.6 = x + y;\ L.12 = 2x + y;$$
$$L.18 = x + 2y;$$
$$\&\ L.15 = L.3 + L.5 = y + 1 - x.$$

241.

Nous avons vu plus haut que tous les nombres proviennent de la multiplication des nombres qu'on nomme premiers. Si l'on connoiſſoit donc ſeulement les logarithmes de tous les nombres premiers, on pourroit trouver par de ſimples additions les logarithmes de tous les autres nombres. Le nombre 210, par exemple, étant formé des facteurs 2, 3, 5, 7, ſon logarithme ſera $= L.2 + L.3 + L.5 + L.7$. Pareillement, puiſque $360 = 2.2.2.3.3.5 = 2^3 3^2 5$, on a $L.360 = 3L.2 + 2L.3 + L.5$. Il eſt donc clair que moyennant les logarithmes des nombres premiers, on peut déterminer ceux de tous les autres nombres, & que c'eſt à déterminer ceux-là qu'il faut s'attacher avant toutes choſes, ſi l'on ſe propoſe de conſtruire des tables de logarithmes.

CHAPITRE XXIII.

De la maniere de repréſenter les Logarithmes.

242.

Nous avons vu que le logarithme de 2 eſt plus grand que $\frac{3}{10}$ & plus petit que $\frac{1}{3}$, & que par conſéquent l'expoſant de 10 doit tomber entre ces deux fractions, pour que la puiſſance devienne $= 2$. Or quoiqu'on ſache cela, quelque fraction cependant qu'on adopte conformément à cette condition, la puiſſance qui en réſulte ſera toujours un nombre irrationnel, plus grand ou plus petit que 2; & par conſéquent le logarithme de 2 ne ſauroit être exprimé par une telle fraction. Cela fait qu'il faut ſe contenter de déterminer la valeur de ce

logarithme d'une maniere assez approchée pour que l'erreur devienne insensible. On se sert pour cela des *fractions décimales ;* c'est ainsi qu'on nomme des quantités, dont la nature & les propriétés méritent d'être mises dans tout le jour possible.

243.

On sait que dans la maniere ordinaire d'écrire les nombres avec le secours des dix chiffres ou caracteres

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

il n'y a que le premier chiffre à droite qui ait sa signification naturelle ; que les chiffres à la seconde place signifient dix fois plus que ce qu'ils signifieroient à la premiere ; que les chiffres à la troisieme place signifient cent fois davantage ; & ceux à la quatrieme mille fois davantage, & ainsi de suite ; c'est-à-dire qu'à mesure qu'ils avancent vers la gauche ils acquierent une valeur dix fois plus grande qu'ils n'avoient au rang précédent. C'est ainsi que dans le nombre 1765 le chiffre 5 est au premier rang à la droite, & signifie aussi 5 réellement. Au second rang est 6 ; mais ce chiffre, au lieu de signifier 6, indique 10.6 ou 60. Le chiffre 7 est au troisieme rang, & signifie 100.7 ou 700. Enfin le 1, qui est au quatrieme rang, signifie 1000 ; voilà donc pourquoi on prononce le nombre proposé de cette maniere,

Un mille (ou *mille*,) *sept cent, soixante & cinq.*

244.

Puisque la valeur des chiffres devient toujours dix fois plus grande en allant de la droite vers la gauche, & que par conséquent elle devient continuellement dix fois moindre en allant de la gauche vers la droite, on pourra en se conformant à cette loi avancer encore davantage vers la droite, & on obtiendra des chiffres dont la signification continuera de devenir dix fois moindre. Mais à quoi il faudra bien

faire attention, c'eſt la place où les chiffres ont leur valeur naturelle, on l'indique par une virgule qu'on met après ce rang. Si l'on rencontre donc, par exemple, le nombre 36,54892, voici comme il faut l'entendre: le chiffre 6 d'abord a ſa valeur naturelle; & le chiffre 3, qui eſt au ſecond rang, ſignifie 30. Mais le chiffre 5 qui vient après la virgule, ne ſignifie que $\frac{5}{10}$; enſuite le 4 ne vaut que $\frac{4}{100}$; le chiffre 8 ſignifie $\frac{8}{1000}$; le chiffre 9 ſignifie $\frac{9}{10000}$; & le chiffre 2 $\frac{2}{100000}$. On voit donc que plus ces chiffres avancent vers la droite, plus leurs valeurs diminuent, & qu'à la fin ces valeurs deviennent ſi petites, qu'on peut avec raiſon les regarder comme nulles (*).

(*) Les opérations de l'Arithmétique ſe pratiquent ſur les fractions décimales de la même maniere que ſur les nombres entiers, il y a ſeulement quelques précautions à prendre après l'opération pour placer la virgule qui ſépare les nombres entiers des décimales. On peut conſulter ſur ce ſujet preſque tous les Traités d'Arithmétique. Lorſque dans la multiplication de ces fractions le multiplicande & le multiplicateur ont un grand nombre

245.

Voilà l'eſpece de nombres qu'on nomme *fractions décimales*, & c'eſt de cette maniere auſſi qu'on indique les logarithmes dans les tables. On y exprime, par exemple, le logarithme de 2 par 0,3010300, où nous voyons 1°. que puiſqu'il y a un 0 devant la virgule, ce logarithme ne fait pas un entier; 2°. que ſa valeur eſt $\frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{0}{1000000} + \frac{0}{10000000}$. On peut remarquer qu'on auroit bien pu omettre les deux derniers zéros, mais c'eſt qu'ils ſervent à indiquer que le logarithme en queſtion ne contient aucune de ces parties qui ont 1000000 & 10000000 pour dénominateur. On ne nie pas au reſte qu'on

de décimales, l'opération ſeroit fort longue & donneroit un réſultat beaucoup plus exact qu'on n'en a beſoin communément; mais on peut la ſimplifier par une méthode qui ne ſe trouve pas dans beaucoup d'Auteurs, & que M. *Marie* a indiquée dans ſon édition des Leçons de Mathematiques de M. de *la Caille*, où il explique auſſi une méthode ſemblable pour la diviſion des décimales.

n'eût pu trouver, en continuant encore, des parties plus petites ; mais pour ce qui est de celles-ci on les néglige à cause de leur extrême petitesse.

246.

Le logarithme de 3 se trouve exprimé dans les tables par 0,4771213 ; on voit donc qu'il ne contient point d'entier, & qu'il est composé des fractions suivantes : $\frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{1}{1000000} + \frac{3}{10000000}$. Mais il ne faut pas croire que de cette maniere le logarithme soit assigné avec la derniere précision. On peut seulement être certain que l'erreur est moindre que de $\frac{1}{10000000}$; il est vrai d'un autre côté que cette erreur est si petite, qu'on peut très-bien la négliger dans la plupart des calculs.

247.

Suivant cette façon d'exprimer les logarithmes, celui de 1 doit être indiqué par 0,0000000, puisqu'il est réellement $= 0$. Le logarithme de 10 est 1,0000000, où l'on reconnoît qu'il est exactement $= 1$. Le logarithme de 100 est 2,0000000, ou exactement $= 2$. Et l'on peut en conclure que les logarithmes de tous les nombres qui sont contenus entre 10 & 100, & par conséquent composés de deux chiffres, que ces logarithmes, dis-je, sont compris entre 1 & 2, & par conséquent qu'ils doivent s'exprimer par 1 + une fraction décimale. C'est ainsi que L. 50 = 1,6989700 ; sa valeur est donc l'unité, & outre cela $\frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{7}{100000}$. On n'aura pas de peine à remarquer de même que les logarithmes des nombres entre 100 & 1000 s'expriment par 2 entiers avec une fraction décimale. Ceux des nombres entre 1000 & 10000, par 3 + une fraction décimale. Ceux des nombres entre 10000 & 100000 par 4 entiers joints à une telle fraction, & ainsi de suite. Le *log.* 800, par exemple, est = 2,9030900 ; celui de 2290 est 3,3598355, &c.

248.

Les logarithmes au contraire des nombres moindres que 10, ou qui ne s'expriment que par un seul chiffre, ne font pas un entier, & voilà pourquoi on trouve un o devant la virgule. Ainsi nous avons deux parties à considérer dans un logarithme. La premiere est celle qui précede la virgule & qui indique les entiers quand il y en a; l'autre indique les fractions décimales qu'il faut ajouter aux entiers. La partie premiere ou entiere d'un logarithme, qu'on nomme le plus souvent la *caractéristique*, se détermine facilement d'après ce que nous avons dit dans l'article précédent. Elle est o pour tous les nombres qui n'ont qu'un chiffre; elle est 1 pour ceux qui en ont deux; elle est 2 pour ceux qui en ont trois, & en général elle est toujours d'une unité moindre que le nombre des chiffres. Si donc on demande le logarithme de 1766, on sait déjà que la premiere partie, ou celle des entiers, est 3 nécessairement.

249.

Ainsi réciproquement on reconnoît à la premiere inspection de la premiere partie d'un logarithme, de combien de chiffres est composé le nombre qui répond à ce logarithme; puisque le nombre de ces figures est toujours d'une unité plus grand que la partie des entiers du logarithme. Si on avoit trouvé, par exemple, pour le logarithme d'un nombre inconnu 6,4771213, on sauroit d'abord que ce nombre doit être de sept chiffres, & plus grand que 1000000. Et en effet ce nombre est 3000000; car *log.* $3000000 = L. 3 + L. 1000000$. Or $L. 3 = 0{,}4771213$, & $L. 1000000 = 6$, & la somme de ces deux logarithmes est 6,4771213.

250.

Le principal pour chaque logarithme est donc la fraction décimale qui suit la virgule, laquelle même une fois connue sert pour plusieurs nombres. Pour prouver ceci,

considérons le logarithme du nombre 365: sa premiere partie est 2 sans contredit; quant à l'autre ou la fraction décimale, indiquons-la, pour abréger, par la lettre x. Nous avons donc $L. 365 = 2 + x$. Or en multipliant continuellement par 10, nous aurons $L. 3650 = 3 + x$; $L. 36500 = 4 + x$; $L. 365000 = 5 + x$, & ainsi de suite. Mais nous pouvons aussi rebrousser & diviser continuellement par 10, cela nous donnera $L. 36,5 = 1 + x$; $L. 3,65 = 0 + x$; $L. 0,365 = -1 + x$; $L. 0,0365 = -2 + x$; $L. 0,00365 = -3 + x$, & ainsi de suite.

251.

Tous ces nombres donc qui proviennent des figures 365, soit précédées, soit suivies de zéros, ont toujours la même fraction décimale pour seconde partie du logarithme; & toute la différence roule sur le nombre entier qui est devant la virgule, lequel peut même, comme nous avons vu, devenir négatif, savoir quand le nombre

proposé est plus petit que 1. Or comme les Calculateurs ordinaires ont de la peine à traiter les nombres négatifs, on a coutume dans ces cas d'augmenter de 10 les entiers du logarithme, c'est-à-dire qu'on écrit 10 au lieu de 0 devant la virgule. De sorte qu'à la place de -1 on a 9; au lieu de -2 on a 8; au lieu de -3 on a 7, &c. Mais il ne faut jamais oublier alors que la caractéristique a été prise de dix unités trop grande, & ne pas s'imaginer que le nombre est de 10, ou 9 ou 8 chiffres. On sent bien que si dans le cas dont nous parlons cette caractéristique est plus petite que 10, on ne peut commencer à écrire les chiffres du nombre qu'après une virgule. Par exemple, que si la caractéristique est 9, on doit commencer au premier rang après une virgule; que si elle est 8, il faut mettre encore un zéro à ce premier rang, & ne commencer à écrire les chiffres qu'au second rang. C'est ainsi que 9,5622929 seroit le logarithme de

0,365, & 8,5622929 le log. de 0,0365. Mais c'eſt dans les tables des ſinus principalement qu'on fait uſage de cette maniere d'écrire les logarithmes.

252.

On trouve dans les tables ordinaires les décimales des logarithmes pouſſées juſqu'à ſept chiffres ou figures, dont la derniere par conſéquent indique les $\frac{1}{10000000}$, & on eſt ſûr qu'ils ne ſont jamais en défaut d'une telle petite partie entiere, & que l'erreur ne peut donc être d'aucune importance. Il y a cependant des calculs où l'on a beſoin d'une préciſion encore plus particuliere; on ſe ſert alors des grandes tables de *Vlacq*, où les logarithmes ſe trouvent calculés en dix décimales.

253.

Comme la premiere partie, ou la caractériſtique d'un logarithme, n'eſt ſujette à aucune difficulté, on l'indique rarement

dans les tables; on n'y exprime que la ſeconde partie, ou les ſept figures de la fraction décimale. On a des tables angloiſes où l'on trouve les logarithmes de tous les nombres depuis 1 juſqu'à 100000, & même ceux de nombres plus grands, parce que de petites tables additionnelles indiquent ce qu'il faut ajouter aux logarithmes, à raiſon des chiffres que les nombres propoſés ont de plus que dans les tables. On trouve, par exemple, le logarithme de 379456 facilement, par le moyen de celui de 37945 & des petites tables dont nous parlons (*).

(*) Ces tables angloiſes ſont celles que *Sherwin* publia au commencement de ce ſiecle, & qui ont été réimprimées pluſieurs fois; on les trouve auſſi dans les tables de *Gardiner*, dont les Aſtronomes ſe ſervent communement, & qui viennent d'être réimprimées à Avignon. Il eſt bon de remarquer à l'égard de ces tables, que comme les logarithmes n'y ſont pouſſés que juſqu'à ſept caracteres, abſtraction faite de la caractériſtique, on ne peut par leur moyen opérer avec une entiere exactitude que ſur des nombres qui n'ayent pas plus de ſix caracteres; mais quand on emploie les grandes tables de *Vlacq*,

254.

On comprendra aisément par ce qui a été dit, comment, ayant trouvé un logarithme, on doit prendre dans les tables le

où les logarithmes sont poussés jusqu'à dix caracteres en décimales, on peut, en prenant les parties proportionnelles, opérer, sans commettre aucune erreur, sur des nombres qui ayent jusqu'à neuf caracteres. La raison de ce que nous venons de dire & les moyens de faire servir facilement ces tables à des opérations sur de plus grands nombres, se trouvent très-bien expliqués dans les *Elémens d'Algebre de* SAUNDERSON, Liv. IX, IIe Part.

Ces tables, au reste, ne donnent directement que les logarithmes qui répondent à des nombres proposés, & lorsqu'on veut repasser des logarithmes aux nombres, comme on rencontre rarement dans les tables le logarithme que l'on a, on est obligé le plus souvent de chercher ces nombres par une méthode d'interpolation, c'est-à-dire, par une voie indirecte. Pour suppléer à ce défaut on a calculé en Angleterre une autre table, qui a été publiée à Londres en 1742, sous le titre de *The Anti-logarithmic Canon, &c. by James* DODSON, & qui est encore assez peu connue; on y trouve les décimales des logarithmes rangées par ordre depuis 0,0001 jusqu'à 1,0000, & à côté les nombres correspondans poussés jusqu'à onze chiffres; on y trouve aussi les parties proportionnelles nécessaires pour déterminer les nombres qui répondent aux logarithmes intermédiaires qui ne se trouvent pas dans la table.

nombre qui lui convient. Cela deviendra encore plus clair par un exemple: multiplions les nombres 343 & 2401. Puisqu'il faut ajouter ensemble les logarithmes, on écrira le calcul de la façon qui suit:

$$\left.\begin{array}{l} \text{L. } 343 = 2,5352941 \\ \text{L. } 2401 = 3,3803922 \end{array}\right\} \text{ajoutés}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5,9156863 \\ 6847 \end{array}\right\} \text{soustrayés}$$

$$16.$$

Le nombre cherché est donc 823543.

Car la somme est le logarithme du produit cherché; on voit par sa caractéristique 5 que ce produit est composé de six chiffres, & ceux-ci se trouvent par le moyen de la fraction décimale & de la table, être 823543.

255.

Comme c'est en particulier dans l'extraction des racines que les logarithmes

rendent de grands ſervices, donnons auſſi un exemple de la maniere dont on les applique à cette partie du calcul. Suppoſez qu'il s'agiſſe d'extraire la racine quarrée de 10. Vous diviſez ſimplement par 2 le logarithme de 10, qui eſt 1,0000000; le quotient 0,5000000 eſt le logarithme de la racine cherchée. Or le nombre qui dans les tables répond à ce logarithme, eſt 3,16228, dont le quarré eſt effectivement égal à 10, à un cent millieme près dont il eſt plus grand.

SECTION SECONDE.

DES différentes Méthodes de Calcul pour les Grandeurs compoſées ou complexes.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Addition des Quantités complexes.

256.

LORSQU'ON a deux ou pluſieurs formules compoſées de pluſieurs termes à ajouter enſemble, on ne fait ſouvent qu'indiquer cette addition par des ſignes, en mettant chaque formule entre deux parentheſes, & en la liant avec les autres par le moyen du ſigne +. S'il s'agit, par exemple, d'ajouter enſemble les formules

$a+b+c$ & $d+e+f$, on indique la ſomme en cette maniere :

$$(a+b+c)+(d+e+f).$$

257.

On ſent bien que ce n'eſt pas là effectuer l'addition, que ce n'eſt que l'indiquer. Mais on voit auſſi que pour la faire réellement on n'a qu'à omettre les crochets; car le nombre $d+e+f$ devant être ajouté à l'autre, on ſait que cela ſe fait en y joignant d'abord $+d$, enſuite $+e$ & enſuite $+f$; ce qui donne donc la ſomme $a+b+c+d+e+f$.

On ſuivroit la même voie, ſi quelques-uns des termes étoient affectés du ſigne —; il faudroit les joindre de la même façon, moyennant le ſigne qui leur eſt propre.

258.

Afin de rendre ceci plus clair, nous conſidérerons un exemple en nombres purs; nous nous propoſerons d'ajouter à la formule $12-8$ cette autre, $15-6$. Si nous

commençons donc par ajouter 15, nous aurons $12-8+15$; or c'étoit ajouter trop, puiſqu'il ne falloit ajouter que $15-6$, & il eſt clair que c'eſt 6 que nous avons ajouté de trop. Otons, reprenons donc ces 6 en les écrivant avec leur ſigne négatif, nous aurons la ſomme véritable

$$12-8+15-6.$$

D'où l'on voit que les ſommes ſe trouvent en écrivant tous les termes, chacun avec le ſigne qui lui eſt propre.

259.

S'il eſt donc queſtion d'ajouter la formule $d-e-f$ à la formule $a-b+c$, on exprimera la ſomme ainſi :

$$a-b+c+d-e-f,$$

en remarquant cependant qu'il n'importe en rien dans quel ordre on écrit ces termes. On peut les changer de place à volonté, pourvu qu'on leur conſerve leurs ſignes. Cette ſomme pourroit, par exemple, s'écrire ainſi :

$$c-e+a-f+d-b.$$

260.

On voit assez que l'addition ne souffre aucune difficulté, de quelque forme que soient les termes à ajouter. S'il falloit ajouter ensemble les formules $2a^3+6\sqrt{b}-4\,\mathrm{L}.c$ & $5\sqrt[5]{a}-7c$, on écriroit

$$2a^3+6\sqrt{b}-4\,\mathrm{L}.c+5\sqrt[5]{a}-7c,$$

soit dans cet ordre même, soit en changeant cet ordre des termes. La somme reviendra toujours à cela, si l'on ne change pas les signes.

261.

Mais il arrive souvent que les sommes trouvées de cette maniere peuvent se réduire considérablement : savoir, quand deux ou plusieurs termes se détruisent les uns les autres. Par exemple, si l'on rencontre dans une même somme les termes $+a-a$ ou $3a-4a+a$; ou bien quand on peut réduire deux ou plusieurs termes en un seul. Voici des exemples de cette seconde réduction :

$$3a+2a=5a;\quad 7b-3b=+4b;$$
$$-6c+10c=+4c;$$
$$5a-8a=-3a;\quad -7b+b=-6b;$$
$$-3c-4c=-7c;$$
$$2a-5a+a=-2a;\quad -3b-5b+2b=-6b.$$

On peut donc abréger toutes les fois que deux ou plusieurs termes sont entiérement les mêmes quant aux lettres. Mais il ne faut pas confondre ces cas avec ceux-ci $2aa+3a$, ou $2b^3-b^4$; ceux de cette espece ne souffrent point de réduction.

262.

Considérons encore quelques exemples de réduction; le suivant nous conduira d'abord à une vérité très-utile. Supposez qu'il faille ajouter ensemble les formules $a+b$ & $a-b$; notre regle donne $a+b+a-b$; or $a+a=2a$, & $b-b=0$; la somme est donc $2a$; par conséquent si l'on ajoute ensemble la somme de deux nombres $(a+b)$ & leur différence $(a-b)$, on obtient le double du plus grand de ces deux nombres.

Voici encore d'autres exemples :

$3a-2b-c$	$a^3-2aab+2abb$
$5b-6c+a$	$-2ab+2abb-b^3$
$4a+3b-7c$	$a^3-3aab+4abb-b^3$.

CHAPITRE II.

De la Souſtraction des Quantités complexes.

263.

SI on ne veut qu'indiquer la ſouſtraction, on enferme chaque formule entre deux crochets, en joignant par le ſigne — la formule qui doit être ſouſtraite à celle dont il faut la ſouſtraire.

En ſouſtrayant, par exemple, la formule $d-e+f$ de la formule $a-b+c$, on trouve le reſte

$$(a-b+c)-(d-e+f);$$

& cette façon de l'indiquer donne ſuffiſamment à connoître laquelle des deux formules doit être ſouſtraite de l'autre.

264.

Mais quand on veut effectuer réellement la ſouſtraction, il faut obſerver premiérement, qu'en ſouſtrayant d'une quantité a une autre quantité poſitive $+b$, on obtient $a-b$. En ſecond lieu, qu'en ſouſtrayant de a une quantité négative $-b$, on obtient $a+b$; parce qu'ôter à quelqu'un une dette eſt autant que lui donner quelque choſe.

265.

Suppoſons maintenant qu'il s'agiſſe de ſouſtraire de la formule $a-c$ la formule $b-d$, on ôtera d'abord b; ce qui donne $a-c-b$: or c'étoit ôter la quantité d de trop, puiſqu'il ne falloit ſouſtraire que $b-d$; il faudra donc reſtituer la valeur de d, & on aura

$$a-c-b+d;$$

d'où il eſt évident qu'il faut changer les ſignes des termes de la formule à ſouſtraire,

& les joindre avec ces ſignes contraires aux termes de l'autre formule.

266.

Il eſt donc facile, moyennant cette regle, de faire la ſouſtraction, puiſqu'on ne fait qu'écrire, telle qu'elle eſt, la formule de laquelle il faut ſouſtraire, & que l'autre s'y joint ſans autre changement que celui des ſignes. C'eſt ainſi que dans le premier exemple, où il s'agiſſoit de ſouſtraire de $a-b+c$ la formule $d-e+f$, on obtient $a-b+c-d+e-f$.

Un exemple en nombres rendra cela encore plus clair. Si on ſouſtrait la formule $6-2+4$ de $9-3+2$, on obtient

$$9-3+2-6+2-4=0,$$

cela eſt évident; car $9-3+2=8$; de même $6-2+4=8$; or $8-8=0$.

267.

La ſouſtraction n'étant donc ſujette à aucune difficulté, il ne reſte qu'à faire

remarquer que ſi dans le reſte il ſe trouve deux ou pluſieurs termes tout-à-fait ſemblables quant aux lettres, ce reſte peut ſe réduire à une expreſſion plus abrégée, ſuivant les mêmes regles que nous avons données pour les ſommes dans l'addition.

268.

Qu'on ait à ſouſtraire de $a+b$, ou de la ſomme de deux quantités, leur différence $a-b$, on aura d'abord $a+b-a+b$; or $a-a=0$ & $b+b=2b$; le reſte cherché eſt donc $2b$, c'eſt-à-dire le double de la plus petite des deux quantités.

269.

Les exemples ſuivans tiendront lieu d'éclairciſſemens ultérieurs :

$aa+ab+bb$	$3a-4b+5c$
$bb+ab-aa$	$2b+4c-6a$
$2aa.$	$9a-6b+c.$

$$\begin{array}{r} a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \\ a^3 - 3aab + 3abb - b^3 \\ \hline 6aab + 2b^3. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{a} + 2\sqrt{b} \\ \sqrt{a} - 3\sqrt{b} \\ \hline + 5\sqrt{b}. \end{array}$$

CHAPITRE III.

De la multiplication des Quantités complexes.

270.

LORSQU'IL n'eſt queſtion que d'indiquer ſimplement une telle multiplication, on met entre deux crochets chacune des formules qui doivent être multipliées enſemble, & on les joint les unes aux autres, quelquefois ſans aucun ſigne, quelquefois en mettant un point ou le ſigne × entre deux. Par exempl. pour indiquer le produit

des deux formules $a-b+c$ & $d-e+f$ multipliées l'une par l'autre, on écrit $(a-b+c).(d-e+f)$ ou $(a-b+c)\times(d-e+f)$.

On ſe ſert beaucoup de cette façon d'indiquer les produits, parce qu'elle donne à connoitre ſur le champ de quels facteurs ils ſont compoſés.

271.

Mais pour montrer comment on doit s'y prendre pour faire une multiplication effective, nous remarquerons d'abord que pour multiplier, par exemple, une formule comme $a-b+c$ par 2, on en multiplie chaque terme ſéparément par ce nombre, de ſorte qu'on obtient

$$2a - 2b + 2c.$$

Or la même choſe a lieu pour tous les autres nombres. Si c'étoit par d qu'il fallût multiplier la même formule, on obtiendroit

$$ad - bd + cd.$$

272.

Nous avons ſuppoſé tout-à-l'heure que d étoit un nombre poſitif ; mais ſi c'eſt par un nombre négatif comme $-e$, que la multiplication doit ſe faire, il faut ſe rappeller la regle que nous avons donnée plus haut, que deux ſignes contraires multipliés enſemble font —, & que deux ſignes égaux donnent +. On aura donc :

$$-ae+be-ce.$$

273.

Pour faire voir à préſent comment une formule, comme A, qu'elle ſoit ſimple ou complexe, doit être multipliée par une formule complexe $d-e$; nous conſidérerons d'abord un exemple en nombres ordinaires, en ſuppoſant que A doive être multiplié par 7—3. Or il eſt évident que c'eſt ici le quadruple de A qu'on demande ; car ſi l'on prend d'abord A ſept fois, il faudra ſouſtraire enſuite A pris trois fois.

En général donc s'il s'agit de multiplier par $d-e$, on multipliera la formule A d'abord par d & enſuite par e, & on ſouſtraira ce dernier produit du premier ; d'où réſulte $dA-eA$.

Suppoſons maintenant $A=a-b$, & que c'eſt cette quantité-ci qu'il faut multiplier par $d-e$; nous aurons

$$dA=ad-bd$$
$$eA=ae-be ;$$

donc le prod. cherc. $=ad-bd-ae+be.$

274.

Puiſque nous connoiſſons donc le produit $(a-b).(d-e)$, & que nous n'avons pas lieu de douter de ſa juſteſſe, nous nous remettrons le même exemple de multiplication ſous les yeux, ſous la forme que voici :

$$\begin{array}{l} a-b \\ d-e \\ \hline ad-bd-ae+be. \end{array}$$

Il nous fait voir qu'il faut multiplier chaque terme de la formule ſupérieure par chaque terme de la formule inférieure, & que pour ce qui regarde les ſignes il faut obſerver ſtrictement la regle donnée plus haut; regle qui ſe confirmeroit par-là entiérement, ſi elle avoit pu être révoquée en doute le moins du monde.

275.

Il ſera facile, d'après cette regle, de calculer l'exemple ſuivant, qui eſt de multiplier $a+b$ par $a-b$:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline aa+ab \\ -ab-bb \\ \hline \end{array}$$

le produit ſera $= aa-bb$.

276.

On ſait qu'on peut ſubſtituer pour a & b des nombres déterminés à volonté; ainſi

l'exemple que nous venons de donner, renferme le principe que voici: le produit de la ſomme de deux nombres multipliée par leur différence eſt égal à la différence des quarrés de ces nombres. On peut exprimer cette vérité en cette maniere:

$$(a+b)\times(a-b) = aa-bb.$$

Et on en conclut cette autre vérité: que la différence de deux nombres quarrés eſt toujours un produit, & diviſible tant par la ſomme que par la différence des racines de ces deux quarrés; & que par conſéquent la différence de deux quarrés ne peut jamais être un nombre premier.

277.

Calculons encore quelques autres exemples:

I.)
$$\begin{array}{r} 2a-3 \\ a+2 \\ \hline 2aa-3a \\ +4a-6 \\ \hline 2aa+a-6. \end{array}$$

II.)
$$\begin{array}{r} 4aa-6a+9 \\ 2a+3 \\ \hline 8a^3-12aa+18a \\ +12aa-18a+27 \\ \hline 8a^3+27. \end{array}$$

III.) $3aa - 2ab - bb$

$2a - 4b$

$6a^3 - 4aab - 2abb$

$- 12aab + 8abb + 4b^3$

$6a^3 - 16aab + 6abb + 4b^3$.

IV.) $aa + 2ab + 2bb$

$aa - 2ab + 2bb$

$a^4 + 2a^3b + 2aabb$

$- 2a^3b - 4aabb - 4ab^3$

$+ 2aabb + 4ab^3 + 4b^4$

$a^4 + 4b^4$.

V.) $2aa - 3ab - 4bb$

$3aa - 2ab + bb$

$6a^4 - 9a^3b - 12aabb$

$- 4a^3b + 6aabb + 8ab^3$

$+ 2aabb - 3ab^3 - 4b^4$

$6a^4 - 13a^3b - 4aabb + 5ab^3 - 4b^4$.

VI.)

VI.)

$aa + bb + cc - ab - ac - bc$

$a + b + c$

$a^3 + abb + acc - aab - aac - abc$

$- abb - acc + aab + aac - abc + b^3 + bcc - bbc$

$- abc - bcc + bbc + c^3$

$a^3 - 3abc + b^3 + c^3$.

278.

Lorſqu'on a plus de deux formules à multiplier enſemble, on comprendra ſans doute qu'après en avoir multiplié deux l'une par l'autre, il faut enſuite multiplier ce produit par une de celles qui reſtent, & ainſi de ſuite; & qu'il eſt indifférent quel ordre on ſuive dans ces multiplications. Qu'on ſe propoſe, par exemple, de trouver la valeur du produit ſuivant compoſé de quatre facteurs:

I.	II.	III.	IV.
$(a+b)$	$(aa+ab+bb)$	$(a-b)$	$(aa-ab+bb)$,

on multipliera d'abord les facteurs I & II:

$$\text{II. } aa + ab + bb$$
$$\text{I. } a + b$$
$$a^3 + aab + abb$$
$$+ aab + abb + b^3$$
$$\text{I. II. } a^3 + 2aab + 2abb + b^3.$$

Après cela on multipliera les facteurs III & IV:

$$\text{IV. } aa - ab + bb$$
$$\text{III. } a - b$$
$$a^3 - aab + abb$$
$$- aab + abb - b^3$$
$$\text{III. IV. } a^3 - 2aab + 2abb - b^3.$$

Il reste donc à multiplier le premier produit I, II, par ce second produit III, IV:

$$a^3 + 2aab + 2abb + b^3 \quad \text{I. II.}$$
$$a^3 - 2aab + 2abb - b^3 \quad \text{III. IV.}$$
$$a^6 + 2a^5b + 2a^4bb + a^3b^3$$
$$- 2a^5b - 4a^4bb - 4a^3b^3 - 2aab^4$$
$$+ 2a^4bb + 4a^3b^3 + 4aab^4 + 2ab^5$$
$$- a^3b^3 - 2aab^4 - 2ab^5 - b^6$$
$$a^6 - b^6.$$

Et ceci est le produit cherché.

279.

Reprenons le même exemple, mais changeons-en l'ordre, en multipliant d'abord les formules I & III, & ensuite les formules II & IV:

$$\text{I. } a + b$$
$$\text{III. } a - b$$
$$aa + ab$$
$$- ab - bb$$
$$\text{I. III.} = aa - bb.$$

$$\text{II. } aa + ab + bb$$
$$\text{IV. } aa - ab + bb$$
$$a^4 + a^3b + aabb$$
$$- a^3b - aabb - ab^3$$
$$+ aabb + ab^3 + b^4$$
$$\text{II. IV.} = a^4 + aabb + b^4.$$

Multipliant enfin ces deux produits I, III & II, IV :

II. IV. $=a^4+aabb+b^4$
I. III. $=aa-bb$

$a^6+a^4bb+aab^4$
$\quad -a^4bb-aab^4-b^6$

on a a^6-b^6,

qui est le produit cherché.

280.

Nous ferons ce calcul encore dans un autre ordre, en multipliant d'abord la I.^e formule par la IV.^e, & ensuite la II.^e par la III.^e

IV. $aa-ab+bb$
I. $a+b$

$a^3-aab+abb$
$\quad +aab-abb+b^3$

I.IV. $=a^3+b^3$.

II. $aa+ab+bb$
III. $a-b$

$a^3+aab+abb$
$\quad -aab-abb-b^3$

II. III. $=a^3-b^3$.

Il reste à multiplier les produits I, IV & II, III.

I. IV. $=a^3+b^3$
II. III. $=a^3-b^3$

$a^6+a^3b^3$
$\quad -a^3b^3-b^6$

& l'on trouve encore a^6-b^6.

281.

Il est à propos d'éclaircir cet exemple par une application numérique. Faisons $a=3$ & $b=2$, nous aurons $a+b=5$ & $a-b=1$; de plus, $aa=9$, $ab=6$, $bb=4$. Donc $aa+ab+bb=19$ & $aa-ab+bb=7$. Donc on demande le produit de 5.19.1.7, qui est 665.

Or $a^6=729$ & $b^6=64$, par conséquent le produit cherché $a^6-b^6=665$, comme nous venons de le dire.

CHAPITRE IV.

De la Division des Quantités complexes.

282.

QUAND on ne veut qu'indiquer la division, on se sert ou de la marque ordinaire des fractions, qui est d'écrire le dénominateur sous le numérateur, & en les séparant par un trait; ou bien de deux crochets qui renferment chaque formule, & en mettant deux points entre le diviseur & le dividende. S'il est question, par exemple, de diviser $a+b$ par $c+d$, on indique le quotient ainsi, $\frac{a+b}{c+d}$, suivant la premiere maniere; & de cette façon, $(a+b):(c+d)$, suivant la seconde. L'une & l'autre expression se prononce *$a+b$ divisé par $c+d$.*

283.

S'il s'agit de diviser une formule composée par une formule simple, on divise chaque terme séparément. Par exemple: $6a-8b+4c$ divisé par 2 fait $3a-4b+2c$; & $(aa-2ab):(a)=a-2b$. De même $(a^3-2aab+3abb):(a)=aa-2ab+3bb$; $(4aab-6aac+8abc):(2a)=2ab-3ac+4bc$; $(9aabc-12abbc+15abcc):(3abc)=3a-4b+5c$ &c.

284.

S'il arrive qu'un des termes du dividende ne soit pas divisible par le diviseur, on indique le quotient par une fraction, comme dans la division de $a+b$ par a, qui donne $1+\frac{b}{a}$. De même $(aa-ab+bb):(aa)=1-\frac{b}{a}+\frac{bb}{aa}$.

Par la même raison, si l'on divise $2a+b$ par 2, on obtient $a+\frac{b}{2}$; & on peut remarquer à cette occasion qu'on pourroit écrire $\frac{1}{2}b$ au lieu de $\frac{b}{2}$, parce que $\frac{1}{2}$ fois b

eſt autant que $\frac{b}{2}$. Pareillement $\frac{b}{3}$ eſt autant que $\frac{1}{3}b$, & $\frac{2b}{3}$ autant que $\frac{2}{3}b$, &c.

285.

Mais quand le diviſeur eſt lui-même une quantité complexe, la diviſion a plus de difficultés. Souvent elle a lieu où on s'en doute le moins; mais lorſqu'elle ne peut ſe faire, il faut ſe contenter d'indiquer le quotient par une fraction, de la maniere que nous avons dit. Nous commencerons par conſidérer quelques cas où la diviſion effective réuſſit.

286.

Suppoſons qu'il s'agiſſe de diviſer le dividende $ac-bc$ par le diviſeur $a-b$, il faut donc que le quotient ſoit tel qu'étant multiplié par le diviſeur $a-b$, on obtienne le dividende $ac-bc$. Or on voit aiſément que ce quotient doit renfermer un c, puiſque ſans cela on ne pourroit obtenir ac. Afin donc de voir ſi c eſt le quotient entier,

on n'a qu'à le multiplier par le diviſeur, & voir ſi cette multiplication produit le dividende en entier, ou ſi elle n'en donne qu'une partie. Dans notre cas, ſi nous multiplions $a-b$ par c, nous avons $ac-bc$ qui eſt en effet le dividende même; de ſorte que c eſt le quotient complet. Il n'eſt pas moins clair que
$(aa+ab):(a+b)=a$; $(3aa-2ab):(3a-2b)=a$; $(6aa-9ab):(2a-3b)=3a$, &c.

287.

On ne peut manquer de cette maniere de trouver une partie du quotient; ſi donc ce qu'on a vu multiplié par le diviſeur, n'épuiſe pas encore le dividende, on n'a qu'à diviſer le réſidu encore par le diviſeur, pour obtenir une ſeconde partie du quotient; & l'on continuera de la même maniere juſqu'à ce qu'on ait trouvé le quotient en entier.

Diviſons, afin de donner un exemple, $aa+3ab+2bb$ par $a+b$; il eſt clair en

premier lieu que le quotient contiendra le terme a, puiſque, ſi cela n'étoit pas, on n'obtiendroit point aa. Or en multipliant le diviſeur $a+b$ par a, il provient $aa+ab$; laquelle quantité étant ſouſtraite du dividende, laiſſe un reſte $2ab+2bb$. Ce reſte, il faut auſſi le diviſer par $a+b$; & il ſaute aux yeux que le quotient de cette diviſion doit contenir le terme $2b$. Or $2b$ multiplié par $a+b$ fait exactement $2ab+2bb$; par conſéquent $a+2b$ eſt ce quotient cherché qui, multiplié par le diviſeur $a+b$, doit produire le dividende $aa+3ab+2bb$. Voici toute l'opération :

$$
\begin{array}{l}
a+b)\,aa+3ab+2bb\,(a+2b \\
\qquad aa+\ ab \\
\qquad \overline{\quad +2ab+2bb} \\
\qquad \quad +2ab+2bb \\
\qquad \quad \overline{\qquad\quad 0.}
\end{array}
$$

288.

On ſe facilite cette opération en faiſant choix d'un des termes du diviſeur pour

l'écrire le premier, & pour ranger enſuite les termes du dividende, en commençant par les plus hautes puiſſances de ce premier terme du diviſeur. Ce terme étoit a dans l'exemple précédent. Les exemples ſuivans rendront la choſe encore plus claire :

$$
\begin{array}{l}
a-b)\,a^3-3aab+3abb-b^3\,(aa-2ab+bb \\
\qquad a^3-aab \\
\qquad \overline{\quad -2aab+3abb} \\
\qquad \quad -2aab+2abb \\
\qquad \quad \overline{\qquad\quad +abb-b^3} \\
\qquad \qquad\quad +abb-b^3 \\
\qquad \qquad\quad \overline{\qquad 0.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a+b)\ aa-bb\ (a-b \\
\qquad aa+ab \\
\qquad \overline{\quad -ab-bb} \\
\qquad \quad -ab-bb \\
\qquad \quad \overline{\qquad 0.}
\end{array}
$$

$3a-2b)\ 18aa-8bb\ (6a+4b$

$18aa-12ab$

$+12ab-8bb$

$+12ab-8bb$

$0.$

$a+b)\ a^3+b^3\ (aa-ab+bb$

a^3+aab

$-aab+b^3$

$-aab-abb$

$+abb+b^3$

$+abb+b^3$

$0.$

$2a-b)\ 8a^3-b^3\ (4aa+2ab+bb$

$8a^3-4aab$

$+4aab-b^3$

$+4aab-2abb$

$+2abb-b^3$

$+2abb-b^3$

$0.$

$aa-2ab+bb)\ a^4-4a^3\ +6aabb-4ab^3+b^4$

$aa-2ab+bb)\ a^4-2a^3b+aabb$

$-2a^3b+5aabb-4ab^3$

$-2a^3b+4aabb-2ab^3$

$+aabb-2ab^3+b^4$

$+aabb-2ab^3+b^4$

$0.$

$aa-2ab+4bb)\ a^4+4aabb+16b^4$

$aa+2ab+4bb)\ a^4-2a^3b\ +4aabb$

$+2a^3b\ +16b^4$

$+2a^3b\ -4aabb+8ab^3$

$+4aabb-8ab^3+16b^4$

$+4aabb-8ab^3+16b^4$

$0.$

$aa-2ab+2bb)\ a^4+4b^4$

$aa+2ab+2bb)\ a^4-2a^3b+2aabb$

$+2a^3b-2aabb+4b^4$

$+2a^3b-4aabb+4ab^3$

$+2aabb-4ab^3+4b^4$

$+2aabb-4ab^3+4b^4$

$0.$

$$
\begin{array}{rl}
1-2x+xx) & 1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5 \\
1-3x+3xx-x^3\,) & 1-2x+xx \\
\hline
 & -3x+9xx-10x^3 \\
 & -3x+6xx-\ 3x^3 \\
\hline
 & +3xx-\ 7x^3+5x^4 \\
 & +3xx-\ 6x^3+3x^4 \\
\hline
 & -\ \ x^3+2x^4-x^5 \\
 & -\ \ x^3+2x^4-x^5 \\
\hline
 & 0.
\end{array}
$$

CHAPITRE V.

De la Résolution des Fractions en des suites infinies (*).

289.

QUAND le dividende n'est pas divisible par le diviseur, le quotient s'exprime, comme nous l'avons déjà dit, par une fraction.

(*) La *théorie des séries* est une des plus importantes de toutes les Mathématiques. Les séries dont il est question dans ce chapitre, ont été trouvées par *Mercator* au milieu du siecle passé, & *Newton* trouva bientôt après celles qui dérivent de l'extraction des racines, & dont il sera question au chapitre XII. Cette théorie a reçu ensuite un nouveau degré de perfection de plusieurs autres Géometres distingués. Les Œuvres de *Jacques Bernoulli* & la seconde partie du *Calcul différentiel* de M. *Euler*, sont les ouvrages où l'on pourra le mieux s'instruire sur ces matieres. On trouvera aussi dans les Mémoires de Berlin pour 1768, une nouvelle méthode de M. *de la Grange* pour résoudre, par le moyen des suites infinies, toutes les équations littérales de quelque degré qu'elles soient.

C'est ainsi que si l'on doit diviser 1 par $1-a$, on obtient la fraction $\frac{1}{1-a}$. Cela n'empêche pas cependant qu'on ne puisse entreprendre la division suivant les regles que nous avons données, & qu'on ne puisse la continuer aussi loin qu'on veut. On ne laissera pas de trouver le vrai quotient, quoique sous des formes différentes.

290.

Pour le prouver, divisons réellement le dividende 1 par le diviseur $1-a$, comme on va voir:

$1-a)\,1\,(1+\frac{a}{1-a}$ ou $1-a)\,1\,(1+a+\frac{aa}{1-a}$

$+1-a$ $+1-a$

résidu $+a.$ $+a$

$+a-aa$

résidu $+aa.$

Pour trouver encore un plus grand nombre de formes, on n'a qu'à continuer en divisant aa par $1-a$:

$1-a)\,aa\,(aa+\frac{a^3}{1-a}$ ensuite $1-a)\,a^3\,(a^3+\frac{a^4}{1-a}$

$aa-a^3$ a^3-a^4

$+a^3$ $+a^4$

& puis $1-a)\,a^4\,\,(a^4+\frac{a^5}{1-a}$

a^4-a^5

$+a^5$, &c.

291.

Nous voyons par là que la fraction $\frac{1}{1-a}$ peut se mettre sous toutes les formes qui suivent:

I.) $1+\frac{a}{1-a}$; II.) $1+a+\frac{aa}{1-a}$;

III.) $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$;

IV.) $1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a}$;

V.) $1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$, &c.

Or en considérant la premiere de ces formules, qui est $1+\frac{a}{1-a}$, & en faisant attention que 1 est autant que $\frac{1-a}{1-a}$, nous avons

$$1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}.$$

Si on suit le même procédé pour la seconde formule $1+a+\frac{aa}{1-a}$, c'est-à-dire que l'on réduise la partie des entiers $1+a$ au même dénominateur $1-a$, on aura $\frac{1-aa}{1-a}$, à quoi si l'on ajoute $+\frac{aa}{1-a}$ on aura $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, c'est-à-dire $\frac{1}{1-a}$.

Dans la 3^e. formule $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, les entiers, réduits au dénominateur $1-a$, font $\frac{1-a^3}{1-a}$; & si on y ajoute la fraction $\frac{a^3}{1-a}$ on a $\frac{1}{1-a}$; donc toutes ces formules

ſont en effet égales en valeur à la fraction propoſée $\frac{1}{1-a}$.

292.

Cela étant on pourra aller plus loin & auſſi loin qu'on voudra, ſans avoir beſoin de calculer davantage. On aura donc $\frac{1}{1-a} = 1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}$; ou bien on pourroit continuer encore, & même ſans jamais finir. C'eſt pourquoi l'on peut dire que la fraction propoſée a été réſolue en une ſuite infinie, laquelle eſt, $1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} +$ &c. à l'infini. Et on eſt très-fondé à ſoutenir que la valeur de cette ſérie infinie eſt la même que celle de la fraction $\frac{1}{1-a}$.

293.

Ce que nous venons de dire peut, au premier abord, paroître étonnant; mais la conſidération de quelques cas particuliers le fera comprendre aiſément.

Suppoſons premiérement $a = 1$; notre ſuite deviendra $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, &c. juſqu'à l'infini. La fraction $\frac{1}{1-a}$, à laquelle elle doit être égale, devient $\frac{1}{0}$; or nous avons remarqué plus haut que $\frac{1}{0}$ eſt un nombre infiniment grand; cela ſe confirme donc ici d'une maniere élégante.

Mais ſi l'on ſuppoſe $a = 2$, notre ſuite devient $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$, &c. à l'infini, & ſa valeur doit être $\frac{1}{1-2}$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{-1} = -1$; ce qui au premier coup d'œil ſemblera abſurde. Mais il faut remarquer que ſi l'on veut s'arrêter à quelque terme de la ſérie ſuſdite, on ne doit le faire qu'en joignant la fraction qui reſte. Suppoſons, par exemple, que nous voulions nous arrêter à 64, il faudra, après avoir écrit $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$, joindre la fraction $\frac{128}{1-2}$ ou $\frac{128}{-1}$ ou -128; on aura donc $127 - 128$, c'eſt-à-dire en effet -1.

Que ſi on continuoit ſans ceſſe la ſuite,

il ne ſeroit à la vérité plus queſtion de la fraction, mais auſſi on ne s'arrêteroit jamais.

294.

Voilà donc des conſidérations néceſſaires, quand on prend pour a des nombres plus grands que l'unité. Mais ſi l'on ſuppoſe a plus petit que 1, tout devient plus facile à concevoir.

Soit, par exemple, $a = \frac{1}{2}$; on aura $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, ce qui ſera égal à la ſérie ſuivante: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ &c. à l'infini. Or ſi l'on prend deux termes ſeulement de cette ſuite, on a $1 + \frac{1}{2}$, & il s'en faut de $\frac{1}{2}$ qu'elle ne ſoit égale à $\frac{1}{1-a} = 2$. Si on prend trois termes, il s'en faut encore de $\frac{1}{4}$; car la ſomme eſt $1\frac{3}{4}$. Si l'on prend quatre termes on a $1\frac{7}{8}$, & il ne manque plus que $\frac{1}{8}$. On voit donc que plus on prend de termes, & plus la différence devient petite, & que par conſéquent ſi

on continue à l'infini, il n'y aura plus de différence du tout entre la ſomme de la ſuite & la valeur 2 de la fraction $\frac{1}{1-a}$.

295.

Soit $a = \frac{1}{3}$; notre fraction $\frac{1}{1-a}$ ſera $= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, à quoi ſe réduit par conſéquent la ſuite $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ &c. juſqu'à l'infini.

Quand on prend deux termes on a $1\frac{1}{3}$, & il manque $\frac{1}{6}$. Si vous prenez trois termes, vous avez $1\frac{4}{9}$, & il manquera encore $\frac{1}{18}$. Prenez quatre termes, vous aurez $1\frac{13}{27}$, & la différence eſt $\frac{1}{54}$. Puis donc que l'erreur devient toujours trois fois moindre, il faut bien qu'à la fin elle s'évanouiſſe.

296.

Suppoſons $a = \frac{2}{3}$; nous aurons $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, & la ſuite $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$ &c. juſqu'à l'infini. Prenant d'abord $1\frac{2}{3}$,

l'erreur est $1\frac{1}{3}$; prenant trois termes, qui font $2\frac{1}{9}$, l'erreur est de $\frac{8}{9}$; prènant quatre termes on a $2\frac{11}{27}$, & l'erreur est encore de $\frac{16}{27}$.

297.

Si $a = \frac{1}{4}$, la fraction est $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$; & la suite devient $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$, &c. Les deux premiers termes faisant $1 + \frac{1}{4}$, produiront $\frac{1}{12}$ d'erreur; & prenant un terme de plus on a $1\frac{5}{16}$, c'est-à-dire seulement $\frac{1}{48}$ d'erreur.

298.

On pourra de la même maniere résoudre en série infinie la fraction $\frac{1}{1+a}$, en divisant réellement le numérateur 1 par le dénominateur $1+a$, comme on va voir :

$1+a)\ 1\ (1 - a + aa - a^3 + a^4$

$1 + a$

$-a$

$-a - aa$

$+aa$

$+aa + a^3$

$-a^3$

$-a^3 - a^4$

$+a^4$

$+a^4 + a^5$

$-a^5$, &c.

d'où il suit que la fraction $\frac{1}{1+a}$ est égale à la suite,

$1 - a + aa - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7$, &c.

299.

Si l'on pose $a = 1$, on a cette comparaison remarquable :

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$, &c. à l'infini. On y trouvera quelque chose de contradictoire; car si on s'arrête à -1,

la ſérie donne 0; & ſi on finit par $+1$, elle donne 1. Mais c'eſt-là préciſément ce qui tranche le nœud; car puiſqu'on doit continuer juſqu'à l'infini ſans s'arrêter jamais ni à -1, ni à $+1$, il eſt clair que la ſomme ne peut être ni 0 ni 1, & qu'il faut que ce réſultat final tienne un milieu entre ces deux, & qu'il ſoit $\frac{1}{2}$.

300.

Faiſons à préſent $a = \frac{1}{2}$, notre fraction ſera $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, laquelle doit donc exprimer la valeur de la ſérie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$, &c. à l'infini. Si l'on ne prend de cette ſérie que les deux premiers termes, on a $\frac{1}{2}$, ce qui eſt trop peu de $\frac{1}{6}$. Si l'on prend trois termes, on a $\frac{3}{4}$, ce qui eſt trop de $\frac{1}{12}$. Si l'on prend quatre termes, on a $\frac{5}{8}$, ce qui eſt trop peu de $\frac{1}{24}$, &c.

301.

Suppoſons encore $a = \frac{1}{3}$; notre fraction ſera $= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, & c'eſt à quoi doit ſe réduire la ſérie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$, &c. à l'infini. Or en conſidérant ſeulement deux termes on a $\frac{2}{3}$, c'eſt trop peu de $\frac{1}{12}$. Trois termes font $\frac{7}{9}$, c'eſt trop de $\frac{1}{36}$. Quatre termes font $\frac{20}{27}$, c'eſt trop peu de $\frac{1}{108}$, & ainſi de ſuite.

302.

La fraction $\frac{1}{1+a}$ peut ſe réſoudre encore d'une autre maniere; ſavoir en diviſant 1 par $a+1$, comme il ſuit:

$$a+1)\ 1\ \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}\right.$$

$$\begin{array}{l}
1+\frac{1}{a} \\
\hline
-\frac{1}{a} \\
-\frac{1}{a}-\frac{1}{aa} \\
\hline
+\frac{1}{aa} \\
+\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3} \\
\hline
-\frac{1}{a^3} \\
-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4} \\
\hline
+\frac{1}{a^4} \\
+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5} \\
\hline
-\frac{1}{a^5}, \text{ \&c.}
\end{array}$$

Par conséquent notre fraction $\frac{1}{a+1}$ est égale à la suite infinie $\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}$, &c. Qu'on fasse $a=1$, on aura la

série $1-1+1-1+1-1$, &c. $=\frac{1}{2}$, comme ci-dessus. Et si l'on suppose $a=2$, on aura la série $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$ &c. $=\frac{1}{3}$.

303.

C'est d'une maniere semblable qu'on pourra résoudre généralement en une suite infinie la fraction $\frac{c}{a+b}$, on aura

$$a+b)\ c\ \left(\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{b^2c}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}, \text{ \&c.}\right.$$

$$\begin{array}{l}
c+\frac{bc}{a} \\
\hline
-\frac{bc}{a} \\
-\frac{bc}{a}-\frac{bbc}{aa} \\
\hline
+\frac{bbc}{aa} \\
+\frac{bbc}{aa}+\frac{b^3c}{a^3} \\
\hline
-\frac{b^3c}{a^3} \\
-\frac{b^3c}{a^3}-\frac{b^4c}{a^4} \\
\hline
+\frac{b^4c}{a^4};
\end{array}$$

d'où l'on voit qu'on peut comparer $\frac{c}{a+b}$ avec la série $\frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}$ &c. jusqu'à l'infini.

Soit $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$, nous aurons $\frac{c}{a+b} = \frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12$, &c.

Soit $a = 10$, $b = 1$ & $c = 11$, nous avons $\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1} = 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} + \frac{11}{1000} - \frac{11}{10000}$ &c.

Si l'on ne considere qu'un seul terme de cette suite, on a $\frac{11}{10}$, ce qui est trop de $\frac{1}{10}$; si on prend deux termes, on a $\frac{99}{100}$, c'est trop peu de $\frac{1}{100}$; si on prend trois termes, on a $\frac{1001}{1000}$, c'est trop de $\frac{1}{1000}$, &c.

304.

Quand il y a plus de deux termes dans le diviseur, on peut également continuer la division jusqu'à l'infini, de la même maniere.

C'est ainsi que si on proposoit la fraction $\frac{1}{1-a+aa}$, la suite infinie à laquelle elle est égale, se trouveroit comme il suit:

$1-a+aa)\ 1\ \ (1+a-a^3-a^4+a^6+a^7$, &c.

$$\begin{array}{l}
1-a+aa \\
\hline
+a-aa \\
+a-aa+a^3 \\
\hline
-a^3 \\
-a^3+a^4-a^5 \\
\hline
-a^4+a^5 \\
-a^4+a^5-a^6 \\
\hline
+a^6 \\
+a^6-a^7+a^8 \\
\hline
+a^7-a^8 \\
+a^7-a^8+a^9 \\
\hline
-a^9.
\end{array}$$

Nous avons donc l'équation $\frac{1}{1-a+aa} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10}$, &c. sans fin. Si nous faisons ici $a = 1$, nous avons $1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1$, &c. laquelle série contient deux fois la série trouvée plus haut $1 - 1 + 1 - 1 + 1$, &c. or comme nous avons trouvé celle-ci $= \frac{1}{2}$, il n'est pas étonnant que nous trouvions $\frac{2}{2}$ ou 1 pour la valeur de celle que nous venons de déterminer.

Qu'on fasse $a=\frac{1}{2}$, on aura l'équation $\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{512}$, &c.

Qu'on suppose $a=\frac{1}{3}$, on aura l'équation $\frac{1}{\frac{7}{9}}=\frac{9}{7}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\frac{1}{729}$, &c. Si on prend les quatre premiers termes de cette suite, on a $\frac{104}{81}$, qui n'est que de $\frac{1}{567}$ moins que $\frac{9}{7}$.

Supposons encore $a=\frac{2}{3}$, nous aurons $\frac{1}{\frac{7}{9}}=\frac{9}{7}=1+\frac{2}{3}-\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\frac{64}{729}$ &c. il faut donc que cette suite soit égale à la précédente ; & soustrayant l'une de l'autre, il faut que $0=\frac{1}{3}-\frac{7}{27}-\frac{15}{81}+\frac{63}{729}$ &c. Ces quatre termes ajoutés ensemble font $-\frac{2}{81}$.

305.

La méthode que nous avons exposée sert à résoudre généralement toutes les fractions en suites infinies, & par là elle est souvent

de la plus grande utilité. De plus il est très-remarquable d'ailleurs qu'une série infinie, quoiqu'elle ne cesse jamais, puisse avoir une valeur déterminée. Aussi a-t-on tiré de ce fonds les inventions les plus importantes, & cette matiere mérite d'autant plus, qu'on l'étudie avec toute l'attention possible.

CHAPITRE VI.

Des Quarrés des Quantités complexes.

306.

QUAND il s'agit de trouver le quarré d'une grandeur complexe, on n'a qu'à la multiplier par elle-même, le produit sera le quarré qu'on cherche.

Par exemple, le quarré de $a+b$ se trouve de la maniere suivante :

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab \\ +ab+bb \\ \hline aa+2ab+bb. \end{array}$$

307.

Ainſi quand la racine conſiſte en deux termes ajoutés enſemble, comme $a+b$, le quarré renferme, 1°. les quarrés de l'un & de l'autre terme, ſavoir aa & bb; 2°. le double du produit des deux, ſavoir $2ab$. De ſorte que la ſomme $aa+2ab+bb$ eſt le quarré de $a+b$. Soit, par exemple, $a=10$ & $b=3$, c'eſt-à-dire qu'il ſoit queſtion de trouver le quarré de 13, on aura $100+60+9$ ou 169.

308.

On trouvera facilement, par le ſecours de cette formule, les quarrés d'aſſez grands nombres, en les partageant en deux parties. Pour trouver, par exemple, le quarré de 57, on conſidérera que ce nombre eſt $=50+7$; d'où l'on conclut que ſon quarré eſt $=2500+700+49=3249$.

309.

On voit auſſi par là que le quarré de $a+1$ ſera $aa+2a+1$: or puiſque le quarré de

de a eſt aa, on trouve donc le quarré de $a+1$ en ajoutant à celui-là $2a+1$; & il faut remarquer que ce $2a+1$ eſt la ſomme des deux racines a & $a+1$.

Ainſi comme le quarré de 10 eſt 100; celui de 11 ſera $100+21$. Le quarré de 57 étant 3249, celui de 58 eſt $3249+115=3364$. Le quarré de $59=3364+117=3481$; le quarré de $60=3481+119=3600$, &c.

310.

Le quarré d'une quantité complexe, comme $a+b$, s'indique de cette façon: $(a+b)^2$. On a donc $(a+b)^2=aa+2ab+bb$, d'où l'on déduit les équations ſuivantes:

$(a+1)^2=aa+2a+1$; $(a+2)^2=aa+4a+4$; $(a+3)^2=aa+6a+9$; $(a+4)^2=aa+8a+16$; &c.

311.

Si la racine eſt $a-b$, le quarré en eſt $aa-2ab+bb$, qui renferme par conſéquent

aussi le quarré des deux termes, mais en sorte qu'il faut en ôter le double du produit de ces deux termes.

Soit, par exemple, $a=10$ & $b=1$, le quarré de 9 se trouvera $=100-20+1=81$.

312.

Puisque nous avons l'équation $(a-b)^2=aa-2ab+bb$, nous aurons $(a-1)^2=aa-2a+1$. Le quarré de $a-1$ se trouve donc en soustrayant de aa la somme des deux racines a & $a-1$, savoir $2a-1$. Soit, par exemple, $a=50$, on a $aa=2500$ & $a-1=49$; donc $49^2=2500-99=2401$.

313.

Ce que nous avons dit peut aussi se confirmer & s'éclaircir par des fractions. Car si l'on prend pour racine $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ (ce qui fait 1) le quarré sera:

$$\tfrac{9}{25}+\tfrac{4}{25}+\tfrac{12}{25}=\tfrac{25}{25},\text{ c'est-à-dire } 1.$$

De plus le quarré de $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ (ou de $\frac{1}{6}$) sera $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$.

314.

Lorsque la racine est d'un plus grand nombre de termes, la méthode de déterminer le quarré est la même. Voici, par exemple, comment on trouve le quarré de $a+b+c$:

$$\begin{array}{llllll} a & +b & +c & & & \\ a & +b & +c & & & \\ \hline aa & +ab & +ac & & +bc & \\ & +ab & +ac & +bb & +bc & +cc \\ \hline aa & +2ab & +2ac & +bb & +2bc & +cc\,; \end{array}$$

on voit qu'il renferme d'abord le quarré de chaque terme de la racine, & outre cela les doubles produits de ces termes multipliés deux à deux.

315.

Pour éclaircir ceci par un exemple, partageons le nombre 256 en trois parties,

200+50+6; son quarré sera donc composé des parties suivantes:

40000	256
2500	256
36	1536
20000	1280
2400	512
600	65536

65536, ce qui est évidemment égal au produit 256.256.

316.

Quand quelques termes de la racine sont négatifs, le quarré se trouve encore par la même regle; mais il faut faire attention quels signes on doit donner aux doubles produits. Ainsi le quarré de $a-b-c$ étant $aa+bb+cc-2ab-2ac+2bc$, si l'on représentoit donc le nombre 256 par 300 $-40-4$, on auroit

Parties positives.	*Parties négatives.*
+90000	−24000
1600	2400
320	−26400
16	
+91936	
−26400	

65536, quarré de 256 comme ci-dessus.

CHAPITRE VII.

De l'extraction des Racines appliquée aux Quantités complexes.

317.

Si nous voulons donner une regle sure pour cette opération, il nous faut considérer attentivement le quarré de la racine $a+b$, qui est $aa+2ab+bb$, afin de voir comment on peut réciproquement parvenir à trouver la racine d'un quarré donné. Faisons donc les réflexions qui suivent.

318.

D'abord comme le quarré $aa + 2ab + bb$ eſt compoſé de pluſieurs termes, il eſt certain que la racine auſſi renfermera plus d'un terme; & que ſi l'on écrit le quarré de maniere que les puiſſances d'une des lettres, comme de a, aillent toujours en diminuant, le premier terme ſera le quarré du premier terme de la racine. Et puiſque dans notre cas, le premier terme du quarré eſt aa, il faut que le premier terme de la racine ſoit a.

319.

Ayant donc trouvé le premier terme de la racine, c'eſt-à-dire a, on conſidérera le reſte du quarré, ſavoir $2ab + bb$, pour voir ſi on pourra en tirer la ſeconde partie de la racine, qui eſt b. Nous remarquerons ici que ce reſte $2ab + bb$ peut être repréſenté par ce produit-ci, $(2a + b)b$. Or ce reſte ayant donc deux facteurs, $2a + b$ & b, il

eſt clair qu'on trouvera ce dernier b, qui eſt la ſeconde partie de la racine, en diviſant le reſte $2ab + bb$ par $2a + b$.

320.

C'eſt donc le quotient de la diviſion du reſte ſuſdit par $2a + b$, qui eſt le ſecond terme cherché de la racine. Or remarquons dans cette diviſion que $2a$ eſt le double du premier terme a de cette racine, lequel eſt déjà déterminé. Ainſi, quoique le ſecond terme ſoit encore inconnu, & qu'il faille juſqu'à préſent laiſſer ſa place vide, nous pouvons néanmoins entreprendre la diviſion, puiſqu'on n'y regarde qu'au premier terme $2a$. Mais auſſi-tôt qu'on aura trouvé le quotient, qui eſt ici b, il faudra le mettre à la place vide, & rendre de cette façon la diviſion complete.

321.

Le calcul donc par lequel on trouve la racine du quarré $aa + 2ab + bb$, peut ſe repréſenter de cette maniere:

$$\begin{array}{l|l} & aa+2ab+bb\ (a+b \\ & aa \\ \hline 2a+b & +2ab+bb \\ & +2ab+bb \\ \hline & \quad 0. \end{array}$$

322.

On pourra de la même maniere trouver la racine quarrée d'autres formules composées, pourvu qu'elles soient des quarrés; les exemples suivans le feront voir :

$$\begin{array}{l|l} & aa+6ab+9bb\ (a+3b \\ & aa \\ \hline 2a+3b & +6ab+9bb \\ & +6ab+9bb \\ \hline & \quad 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & 4aa-4ab+bb\ (2a-b \\ & 4aa \\ \hline 4a-b & -4ab+bb \\ & -4ab+bb \\ \hline & \quad 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & 9pp+24pq+16qq\ (3p+4q \\ & 9pp \\ \hline 6p+4q & +24pq+16qq \\ & +24pq+16qq \\ \hline & \quad 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & 25xx-60x+36\ (5x-6 \\ & 25xx \\ \hline 10x-6 & -60x+36 \\ & -60x+36 \\ \hline & \quad 0. \end{array}$$

323.

Quand après la division il reste un résidu, c'est signe que la racine est composée de plus de deux termes. Ce qu'on fait alors, c'est de regarder les deux termes déjà trouvés comme faisant la premiere partie, & de tirer du résidu la seconde partie, de la même maniere qu'on avoit trouvé le second terme de la racine. Les exemples suivans rendront ce procédé plus clair.

$$aa+2ab-2ac-2bc+bb+cc\ (a+b-c$$
$$aa$$

$$2a+b \mid +2ab-2ac-2bc+bb+cc$$
$$+2ab \qquad +bb$$

$$2a+2b-c \mid -2ac-2bc+cc$$
$$-2ac-2bc+cc.$$

$$a^4+2a^3+3aa+2a+1\ (aa+a+1$$
$$a^4$$

$$2aa+a \mid +2a^3+3aa$$
$$+2a^3+aa$$

$$2aa+2a+1 \mid +2aa+2a+1$$
$$+2aa+2a+1.$$

$$a^4-4a^3b+8ab^3+4b^4\ (aa-2ab-2bb$$
$$a^4$$

$$2aa-2ab \mid -4a^3b+8ab^3$$
$$-4a^3b+4aabb$$

$$2aa-4ab-2bb \mid -4aabb+8ab^3+4b^4$$
$$-4aabb+8ab^3+4b^4.$$

$$(a^3-3aab+3abb-b^3)$$
$$a^6-6a^5b+15a^4bb-20a^3b^3+15aab^4-6ab^5+b^6$$
$$a^6$$

$$2a^3-3aab \mid -6a^5b+15a^4bb$$
$$-6a^5b+9a^4bb$$

$$2a^3-6aab+3abb \mid +6a^4bb-20a^3b^3+15aab^4$$
$$+6a^4bb-18a^3b^3+9aab^4$$

$$2a^3-6aab+6abb-b^3 \mid -2a^3b^3+6aab^4-6ab^5+b^6$$
$$-2a^3b^3+6aab^4-6ab^5+b^6$$

$$0.$$

324.

On déduit facilement de la regle que nous venons d'expofer, la méthode qu'enfeignent les livres d'Arithmétique pour l'extraction de la racine quarrée. Voici quelques exemples en nombres :

```
   5'29|23       17'64|42       23'04|48
   4   |         16   |         16   |
43|129        82|164         88|704
  |129          |164           |704
    0.             0.             0.
```

```
    40'96|64          96'04|98
    36   |            81   |
124|496           188|1504
   |496              |1504
     0.                 0.
```

```
    1'5 6'2 5|125       99'80'01|999
    1        |          81      |
 22|5 6              189|1880
   |4 4                 |1701
245|1225            1989|17901
   |1225                |17901
      0.                   0.
```


325.

Mais lorfqu'après l'opération entiere il refte un réfidu, c'eft une marque que le nombre propofé n'eft pas un quarré, & par conféquent qu'on ne peut pas en affigner la racine. On fe fert dans ces cas du figne radical que nous avons déjà employé plus haut ; on écrit ce figne devant la formule, & on met la formule elle-même entre deux crochets, ou fous un trait. C'eft ainfi que la racine quarrée de $aa+bb$ s'indique par $\sqrt{(aa+bb)}$, ou par $\sqrt{\overline{aa+bb}}$; & que $\sqrt{(1-xx)}$, ou $\sqrt{\overline{1-xx}}$, exprime la racine quarrée de $1+xx$. On peut auffi, au lieu de ce figne radical, faire ufage de l'expofant rompu $\frac{1}{2}$, & indiquer, par exemple, la racine quarrée de $aa+bb$ par $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$, ou par $\overline{aa+bb}^{\frac{1}{2}}$.

CHAPITRE VIII.

Du Calcul des Quantités irrationnelles.

326.

LORSQU'IL s'agit d'ajouter enſemble deux ou pluſieurs formules irrationnelles, cela ſe fait, ſuivant la maniere preſcrite plus haut, en écrivant de ſuite tous les termes chacun avec le ſigne qui lui eſt propre. Et ce qu'il faut remarquer quant aux façons d'abréger, c'eſt que, par exemple, au lieu de $\sqrt{a}+\sqrt{a}$ on écrit $2\sqrt{a}$, & que $\sqrt{a}-\sqrt{a}$ fait 0, ces deux termes ſe détruiſant l'un l'autre. C'eſt ainſi que les formules $3+\sqrt{2}$ & $1+\sqrt{2}$ ajoutées enſemble, font $4+2\sqrt{2}$ ou $4+\sqrt{8}$; que la ſomme de $5+\sqrt{3}$ & de $4-\sqrt{3}$, eſt 9; & que celle de $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$, & de $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, eſt $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

327.

La ſouſtraction ſe fait de même très-facilement, vu qu'on n'a beſoin que d'ajouter enſemble les nombres propoſés, en prenant le contraire des ſignes qui les affectent: l'exemple ſuivant le fera voir; nous ſouſtrairons le nombre inférieur du ſupérieur.

$$\begin{array}{l} 4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\ 1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6} \\ \hline 3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6}. \end{array}$$

328.

On ſe rappellera dans la multiplication que $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{a}$ fait a; & que ſi les nombres qui ſuivent le ſigne $\sqrt{}$ ſont différens, comme a & b, on a $\sqrt{ab}$ pour le produit de $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{b}$. Il ſera facile après cela de calculer les exemples qui ſuivent:

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad +\sqrt{2}+2 \\ \hline 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}. \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4+2\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \\ \hline 8+4\sqrt{2} \\ \quad -4\sqrt{2}-4 \\ \hline 8-4 \quad =4. \end{array}$$

329.

Ce que nous avons dit regarde aussi les quantités imaginaires. On observera seulement encore que $\sqrt{-a}$ multiplié par $\sqrt{-a}$ fait $-a$.

S'il s'agissoit de trouver le cube de $-1+\sqrt{-3}$, on prendroit le quarré de ce nombre, & on multiplieroit ce quarré encore par le même nombre ; voici l'opération :

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +1-\sqrt{-3} \\ \quad -\sqrt{-3}-3 \\ \hline +1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3} \\ \qquad\qquad\qquad\quad -1+\sqrt{-3} \\ \hline \qquad\qquad\qquad\quad +2+2\sqrt{-3} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -2\sqrt{-3}+6 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\quad 2+6 \quad =8. \end{array}$$

330.

Dans la division des quantités sourdes on n'a besoin que de mettre les quantités proposées en forme de fraction ; celle-ci peut ensuite se changer en une autre expression dont le dénominateur soit rationnel. Car si ce dénominateur est, par exemple, $a+\sqrt{b}$, & qu'on le multiplie de même que le numérateur par $a-\sqrt{b}$, le nouveau dénominateur sera $aa-b$, où il ne se trouve plus de signe radical. Supposons qu'on propose de diviser $3+2\sqrt{2}$ par $1+\sqrt{2}$, nous aurons d'abord $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Multipliant maintenant les deux termes de la fraction par $1-\sqrt{2}$, nous aurons pour le numérateur :

$$\begin{array}{l} 3+2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 3+2\sqrt{2} \\ \quad -3\sqrt{2}-4 \\ \hline 3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1 ; \end{array}$$

& pour le dénominateur:

$$1+\sqrt{2}$$
$$1-\sqrt{2}$$
$$\overline{1+\sqrt{2}}$$
$$-\sqrt{2}-2$$
$$\overline{1-2=-1.}$$

Notre nouvelle fraction est donc $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$; & si nous multiplions encore les deux termes par -1, nous aurons pour le numérateur $+\sqrt{2}+1$, & pour le dénominateur $+1$. Or il est facile de se convaincre que $\sqrt{2}+1$ équivaut à la fraction proposée $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; car $\sqrt{2}+1$ étant multiplié par le diviseur $1+\sqrt{2}$

$$1+\sqrt{2}$$
$$1+\sqrt{2}$$
$$\overline{1+\sqrt{2}}$$
$$+\sqrt{2}+2$$

on a $1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$.

Autre exemple: $8-5\sqrt{2}$ divisé par $3-2\sqrt{2}$ fait $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Multipliant ces deux termes de la fraction par $3+2\sqrt{2}$, on a pour le numérateur

$$8-5\sqrt{2}$$
$$3+2\sqrt{2}$$
$$\overline{24-15\sqrt{2}}$$
$$+16\sqrt{2}-20$$
$$\overline{24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2};}$$

& pour le dénominateur

$$3-2\sqrt{2}$$
$$3+2\sqrt{2}$$
$$\overline{9-6\sqrt{2}}$$
$$+6\sqrt{2}-4.2$$
$$\overline{9-8=+1.}$$

Par conséquent le quotient seroit $4+\sqrt{2}$. En voici la preuve:

$$
\begin{array}{l}
4+\sqrt{2} \\
3-2\sqrt{2} \\
\hline
12+3\sqrt{2} \\
\quad -8\sqrt{2}-4 \\
\hline
12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2}.
\end{array}
$$

331.

C'est de la même maniere qu'on peut transformer de ces fractions en d'autres, dont le dénominateur soit rationnel. Si l'on a, par exemple, la fraction $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$, & que l'on en multiplie le numérateur & le dénominateur par $5+2\sqrt{6}$, on la transformera en celle-ci, $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5+2\sqrt{6}$.

De même la fraction $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ prend cette forme, $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$. Et $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ devient $=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$.

332.

On pourra de la même maniere faire disparoître peu à peu les radicaux du dénominateur, quand il contient plusieurs termes. Soit proposée la fraction $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, on multipliera d'abord ces deux termes par $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$; on aura $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$. Multipliant ensuite encore ce numérateur & ce dénominateur par $5+2\sqrt{6}$, on a $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

CHAPITRE IX.

Des Cubes & de l'extraction des Racines cubiques.

333.

POUR trouver le cube d'une racine $a+b$, on ne fait que multiplier son quarré $aa+2ab+bb$ encore une fois par $a+b$,

$$
\begin{array}{l}
aa+2ab+bb \\
a+b \\
\hline
a^3+2aab+abb \\
\quad +aab+2abb+b^3 \\
\hline
\end{array}
$$

le cube sera $=a^3+3aab+3abb+b^3$.

Il renferme donc les cubes des deux parties de la racine, & outre cela encore $3aab+3abb$, quantité qui équivaut à $(3ab).(a+b)$, c'est-à-dire, au triple du produit des deux parties a & b, multiplié par leur somme.

334.

Ainsi toutes les fois qu'une racine est composée de deux termes, il est facile d'en trouver le cube d'après cette regle. Par exemple, le nombre $5=3+2$; son cube est donc $27+8+18.5=125$.

Que $7+3=10$ soit la racine; le cube sera $343+27+63.10=1000$.

Pour trouver le cube de 36, on supposera la racine $36=30+6$, & on aura pour le cube cherché, $27000+216+540.36=46656$.

335.

Mais si c'est au contraire le cube qui est donné, savoir $a^3+3aab+3abb+b^3$, & qu'il s'agisse d'en trouver la racine, on fera préalablement les remarques qui suivent.

D'abord si le cube est ordonné suivant les puissances d'une lettre, on reconnoît facilement par le premier terme a^3, le premier terme a de la racine, puisque le cube en est a^3; si l'on soustrait donc ce cube du cube proposé, on obtient le reste, $3aab+3abb+b^3$, lequel doit fournir le second terme de la racine.

336.

Mais comme nous savons d'avance que ce second terme est $+b$, il s'agit principalement de voir comment il se déduit du reste susdit. Or ce reste peut être exprimé par deux facteurs, comme $(3aa+3ab+bb).(b)$; si on le divise donc par $3aa+3ab+bb$, c'est le moyen d'obtenir la seconde partie de la racine $+b$, qu'on demande.

337.

Mais comme ce second terme ne doit pas être supposé connu, le diviseur est inconnu pareillement; cependant nous avons

le premier terme de ce diviseur, & cela suffit; car il est $3aa$, c'est-à-dire, le triple du quarré du premier terme déjà trouvé, & moyennant cela il n'est pas difficile de trouver aussi l'autre partie b, & de compléter ensuite le diviseur avant qu'on acheve la division. Il faudra pour cet effet joindre à $3aa$ le triple du produit des deux termes ou $3ab$, & bb ou le quarré du second terme de la racine.

338.

Appliquons ce que nous venons de dire à deux exemples pour d'autres cubes donnés.

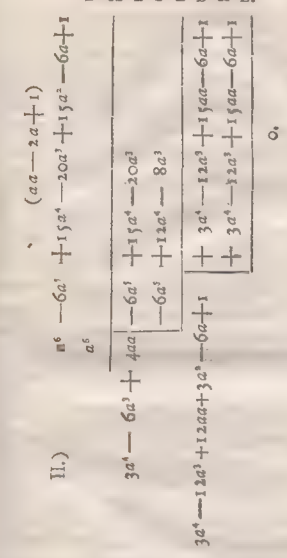
I.) $a^3 + 12aa + 48a + 64$ $(a + 4$

a^3

$3aa + 12a + 16$ | $+ 12aa + 48a + 64$

$+ 12aa + 48a + 64$

$0.$



339.

L'explication que nous avons donnée fait le fondement de la regle ordinaire pour l'extraction des racines cubiques des nombres. Voici, par exemple, le plan de l'opération pour le nombre 2197:

	2'197 (10+3=13
	1 000
300	1 197
90	
9	
399	1 197
	0.

Faisons encore le calcul de l'extraction de la racine cubique de 34965783:

	34 965 783 (300+20+7
	27 000 000
270000	7 965 783
18000	
400	
288400	5 768 000
307200	2 197 783
6720	
49	
313969	2 197 783
	0.

CHAPITRE X.

Des Puissances plus hautes des Quantités complexes.

340.

Après les quarrés & les cubes viennent des puissances plus hautes, ou d'un plus grand nombre de degrés. On les indique par des exposans de la maniere que nous avons expliquée plus haut ; il faut seulement observer, quand la racine est complexe, de l'enfermer entre deux parentheses. Ainsi $(a+b)^5$ signifie que $a+b$ est élevé au cinquieme degré, & $(a-b)^6$ indique la sixieme puissance de $a-b$. Nous ferons voir dans ce chapitre le développement de ces puissances.

341.

Soit donc $a+b$ la racine ou la premiere puissance, les puissances plus hautes se trouveront par la multiplication de la maniere qui suit:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$a+b$$
$$aa+ab$$
$$+ab+bb.$$
$$(a+b)^2 = aa+2ab+bb.$$
$$a+b$$
$$a^3+2aab+abb$$
$$+aab+2abb+b^3.$$
$$(a+b)^3 = a^3+3aab+3abb+b^3$$
$$a+b$$
$$a^4+3a^3b+3aabb+ab^3$$
$$+a^3b+3aabb+3ab^3+b^4.$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$$
$$a+b$$
$$a^5+4a^4b+6a^3bb+4aab^3+ab^4$$
$$+a^4b+4a^3bb+6aab^3+4ab^4$$
$$+b^5.$$

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3$$
$$+5ab^4+b^5$$
$$a+b$$
$$a^6+5a^5b+10a^4bb+10a^3b^3$$
$$+5aab^4+ab^5$$
$$+a^5b+5a^4bb+10a^3b^3$$
$$+10a^2b^4+5ab^5+b^6.$$
$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3$$
$$+15aab^4+6ab^5+b^6, \text{ \&c.}$$

342.

On trouve de même les puiſſances de la racine $a-b$, & on va voir qu'elles ne different des précédentes, qu'en ce que les termes 2^e^, 4^e^, 6^e^, &c. ſont affectés du ſigne *moins :*

$$(a-b)^1 = a-b$$
$$a-b$$
$$aa-ab$$
$$-ab+bb.$$

$$(a-b)^2 = aa - 2ab + bb$$
$$a - b$$
$$a^3 - 2aab + abb$$
$$- aab + 2abb - b^3.$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3aab + 3abb - b^3$$
$$a - b$$
$$a^4 - 3a^3b + 3aabb - ab^3$$
$$- a^3b + 3aabb - 3ab^3 + b^4.$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6aabb - 4ab^3 + b^4$$
$$a - b$$
$$a^5 - 4a^4b + 6a^3bb - 4aab^3$$
$$+ ab^4$$
$$- a^4b + 4a^3bb - 6aab^3$$
$$+ 4ab^4 - b^5.$$
$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3bb - 10aab^3$$
$$+ 5ab^4 - b^5$$
$$a - b$$
$$a^6 - 5a^5b + 10a^4bb - 10a^3b^3$$
$$+ 5aab^4 - ab^5$$
$$- a^5b + 5a^4bb - 10a^3b^3$$
$$+ 10aab^4 - 5ab^5 + b^6.$$

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3$$
$$+ 15aab^4 - 6ab^5 + b^6, \&c.$$

On voit ici que toutes les puiſſances impaires de b reçoivent le ſigne $-$, tandis que les puiſſances paires gardent le ſigne $+$. La raiſon en eſt évidente ; car puiſque dans la racine ſe trouve $-b$, les puiſſances de cette lettre monteront de cette maniere : $-b$, $+bb$, $-b^3$, $+b^4$, $-b^5$, $+b^6$, &c. & il eſt clair par là que les puiſſances paires doivent être affectées du ſigne $+$, & les impaires du ſigne contraire $-$.

343.

Il ſe préſente ici une queſtion importante, c'eſt comment, ſans continuer le calcul de la même maniere dans toutes les formes, on pourroit trouver toutes les puiſſances tant de $a+b$, que de $a-b^2$. Nous remarquerons avant toutes choſes, que ſi on eſt en état d'aſſigner toutes les puiſſances de $a+b$, celles de $a-b$ ſont toutes trouvées, puiſqu'on n'a qu'à changer les ſignes des

termes pairs, c'eſt-à-dire du ſecond, du quatrieme, du ſixieme terme, &c. Le principal revient donc à établir une regle, d'après laquelle toute puiſſance de $a+b$, quelque haute qu'elle ſoit, puiſſe être déterminée ſans qu'il ſoit néceſſaire de faire le calcul pour toutes celles qui la précedent.

344.

Or obſervons que ſi dans les puiſſances déterminées ci-deſſus on fait abſtraction des nombres qui précedent chaque terme, & qu'on nomme les *coefficiens*, il regne dans tous ces termes un ordre remarquable; d'abord on voit le premier terme a de la racine élevé à la puiſſance même qu'on demande; dans les termes ſuivans les puiſſances de a diminuent continuellement de l'unité, les puiſſances de b augmentent d'autant; de ſorte que la ſomme des expoſans de a & de b eſt toujours la même & égale au nombre du degré demandé, & à la fin ſe trouve le terme b ſeul élevé à la

la même puiſſance. Si l'on demande donc la dixieme puiſſance de $a+b$, on eſt sûr que les termes dégagés des coefficiens ſe ſuivront dans l'ordre que voici: a^{10}, $a^9 b$, $a^8 bb$, $a^7 b^3$, $a^6 b^4$, $a^5 b^5$, $a^4 b^6$, $a^3 b^7$, $a^2 b^8$, ab^9, b^{10}.

345.

Il reſte donc à faire voir comment on doit déterminer les coefficiens qui appartiennent à ces termes, ou les nombres par leſquels il faut multiplier ces termes. Or quant au premier terme, ſon coefficient eſt toujours l'unité; & quant au ſecond, ſon coefficient eſt conſtamment l'expoſant même de la puiſſance; mais pour ce qui regarde les autres termes, il n'eſt pas ſi facile d'obſerver un ordre dans leurs coefficiens. Cependant ſi l'on continue encore ces coefficiens, on ne laiſſera pas d'appercevoir auſſi une loi, moyennant laquelle on pourra aller auſſi loin qu'on voudra. C'eſt ce que la table ſuivante fera voir.

I. puiss. coefficiens 1,1
II. ——— 1,2,1
III. ——— 1,3,3,1
IV. ——— 1,4,6,4,1
V. ——— 1,5,10,10,5,1
VI. ——— 1,6,15,20,15,6,1
VII. — 1,7,21,35,35,21,7,1
VIII. — 1,8,28,56,70,56,28,8,1
IX. 1,9,36,84,126,126,84,36,9,1
X. 1,10,45,120,210,252,210,120,45,10,1
&c.

On voit donc que la dixieme puissance de $a+b$ sera :
$a^{10}+10a^9b+45a^8bb+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}$.

346.

Il faut remarquer à l'égard de ces coefficiens, que pour chaque puissance leur somme doit être égale au nombre 2 élevé à la même puissance. Qu'on fasse $a=1$ & $b=1$, chaque terme, abstraction faite

du coefficient, sera $=1$; par conséquent ce sera simplement la somme des coefficiens qui indiquera la valeur de la puissance ; cette somme dans l'exemple précédent est 1024, & en effet $(1+1)^{10}=2^{10}=1024$.

Il en est de même des autres puissances ; on a pour la

I.^{e} $1+1=2=2^1$,
II.^{e} $1+2+1=4=2^2$,
III.^{e} $1+3+3+1=8=2^3$,
IV.^{e} $1+4+6+4+1=16=2^4$,
V.^{e} $1+5+10+10+5+1=32=2^5$,
VI.^{e} $1+6+15+20+15+6+1=64=2^6$,
VII.^{e} $1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^7$, &c.

347.

Une autre remarque à faire au sujet de ces coefficiens, c'est qu'ils croissent depuis le commencement jusqu'au milieu, & qu'ensuite ils décroissent dans le même ordre.

Dans les puiſſances paires le plus grand coefficient eſt exactement au milieu ; mais dans les puiſſances impaires, on voit deux coefficiens égaux & plus grands que les autres qui ſe trouvent au milieu, & qui appartiennent aux termes moyens.

Quant à l'ordre de ces coefficiens, il mérite une attention particuliere ; car c'eſt dans cet ordre même qu'on trouve les moyens de les déterminer pour une puiſſance quelconque, ſans paſſer par les précédentes. Nous allons en donner la méthode, en en réſervant cependant la démonſtration pour le chapitre ſuivant.

348.

Pour trouver les coefficiens d'une puiſſance propoſée, par exemple, la ſeptieme, on écrira les fractions qui ſuivent l'une après l'autre :

$$\frac{7}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{7}.$$

On voit dans cet arrangement que les numérateurs commencent par l'expoſant de

la puiſſance qu'on demande, & qu'ils diminuent ſucceſſivement de l'unité pendant que les dénominateurs ſe ſuivent dans l'ordre naturel des nombres, 1, 2, 3, 4, &c. Or le premier coefficient étant toujours 1, la premiere fraction donne le ſecond coefficient. Le produit des deux premieres fractions, multipliées l'une par l'autre, repréſente le troiſieme coefficient. Le produit des trois premieres fractions repréſente le quatrieme coefficient, & ainſi de ſuite.

Ainſi le premier coefficient $= 1$; le ſecond $= \frac{7}{1} = 7$; le troiſieme $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2} = 21$; le quatrieme $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2}.\frac{5}{3} = 35$; le cinquieme $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2}.\frac{5}{3}.\frac{4}{4} = 35$; le ſixieme $= \frac{7}{1}.\frac{6}{2}.\frac{5}{3}.\frac{4}{4}.\frac{3}{5} = 21$; le ſeptieme $= 21.\frac{2}{6} = 7$; le huitieme $= 7.\frac{1}{7} = 1$.

349.

On a donc pour la ſeconde puiſſance les deux fractions $\frac{2}{1}.\frac{1}{2}$, d'où il s'enſuit que le premier coefficient $= 1$; le ſecond $= \frac{2}{1} = 2$; & le troiſieme $= 2.\frac{1}{2} = 1$.

La troisieme puissance fournit les fractions $\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3}$; donc le premier coefficient $=1$; le second $=\frac{3}{1}=3$; le troisieme $=3.\frac{2}{2}=3$; le quatrieme $=\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3}=1$.

On a pour la quatrieme puissance ces fractions-ci, $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}$; par conséquent le premier coefficient $=1$; le second $\frac{4}{1}=4$; le troisieme $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}=6$; le quatrieme $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}=4$; & le cinquieme $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}=1$.

350.

Cette regle nous procure donc évidemment l'avantage de n'avoir pas besoin de connoître les coefficiens précédens, & de trouver au contraire sur le champ, pour une puissance quelconque, les coefficiens qui lui sont propres.

Ainsi pour la dixieme puissance on écrira les fractions $\frac{10}{1}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{10}$, moyennant quoi l'on trouve

le premier coefficient $=1$;
le second $=\frac{10}{1}=10$,

le troisieme $=10.\frac{9}{2}=45$,
le quatrieme $=45.\frac{8}{3}=120$,
le cinquieme $=120.\frac{7}{4}=210$,
le sixieme $=210.\frac{6}{5}=252$,
le septieme $=252.\frac{5}{6}=210$,
le huitieme $=210.\frac{4}{7}=120$,
le neuvieme $=120.\frac{3}{8}=45$,
le dixieme $=45.\frac{2}{9}=10$,
le onzieme $=10.\frac{1}{10}=1$.

351.

On peut aussi écrire ces fractions telles qu'elles sont, sans en calculer la valeur, & il est facile de cette maniere d'écrire une puissance quelconque de $a+b$, quelque haute qu'elle soit. C'est ainsi que la centieme puissance de $a+b$ sera $(a+b)^{100}$ $=a^{100}+\frac{100}{1}.a^{99}b+\frac{100.99}{1.2}.a^{98}bb+\frac{100.99.98}{1.2.3}a^{97}b^{3}+\frac{100.99.98.97}{1.2.3.4}a^{96}b^{4}+$, &c. d'où il est aisé de conclure quelle sera la loi des termes suivans.

CHAPITRE XI.

De la permutation des Lettres, fur laquelle fe fonde la démonftration de la Regle précédente.

352.

SI on remonte à l'origine des coefficiens dont nous venons de nous occuper, on trouvera que chaque terme fe préfente autant de fois qu'il eft poffible de tranfpofer les lettres qui compofent ce terme; ou bien, pour nous exprimer d'une autre maniere, que le coefficient de chaque terme eft égal au nombre des permutations que fouffrent les lettres dont ce terme eft compofé. Dans la feconde puiffance, par exemple, le terme ab eft pris deux fois, c'eft-à-dire que fon coefficient eft 2; & on peut en effet changer doublement l'ordre des lettres qui compofent ce terme, puifqu'on peut écrire ab & ba; le terme aa au contraire ne fe

préfente qu'une fois, parce que l'ordre des lettres ne peut fubir aucun changement ou permutation. Dans la troifieme puiffance de $a+b$, le terme aab peut s'écrire de trois manieres différentes, aab, aba, baa; auffi le coefficient eft-il 3. De même dans la quatrieme puiffance le terme a^3b ou $aaab$, admet les quatre difpofitions différentes, $aaab$, $aaba$, $abaa$, $baaa$; c'eft pourquoi fon coefficient eft 4. Le terme $aabb$ fouffre fix permutations, $aabb$, $abba$, $baba$, $abab$, $bbaa$, $baab$, & fon coefficient eft 6. Il en eft de même dans tous les cas.

353.

En effet fi l'on confidere que la quatrieme puiffance, par exemple, d'une racine quelconque compofée même de plus de deux termes, comme $(a+b+c+d)^4$, fe trouve en multipliant ces quatre facteurs, I. $a+b+c+d$; II. $a+b+c+d$; III. $a+b+c+d$; IV. $a+b+c+d$; on peut voir aifément que chaque lettre du premier facteur doit

ſe multiplier par chaque lettre du ſecond, enſuite par chaque lettre du troiſieme, & enfin encore par chaque lettre du quatrieme.

Il faut donc non-ſeulement que chaque terme ſoit composé de quatre lettres, mais auſſi qu'il ſe préſente ou qu'il entre dans la ſomme autant de fois que ces lettres peuvent être diſpoſées différemment entr'elles, d'où provient enſuite ſon coefficient.

354.

Il importe donc beaucoup ici de ſavoir de combien de manieres différentes un nombre donné de lettres peuvent être diſpoſées entr'elles. Et il faudra dans cette recherche faire attention ſur-tout ſi les lettres dont il s'agit ſont les mêmes ou diverſes. Quand elles ſont les mêmes, il ne peut y avoir de permutation, & c'eſt auſſi pourquoi les puiſſances ſimples, comme a^2, a^3, a^4, &c. ont toutes l'unité pour coefficient.

355.

Nous ſuppoſerons d'abord toutes les lettres diverſes; & en commençant par le cas le plus ſimple, de deux lettres ou ab, nous voyons que ce ſont évidemment deux tranſpoſitions qui peuvent avoir lieu; ſavoir ab, ba.

Si nous avons trois lettres, abc, à conſidérer, nous remarquons que chacune des trois pourroit prendre la premiere place, tandis que les deux autres admettroient deux permutations. Car ſi a eſt la premiere lettre, on a les deux diſpoſitions abc, acb; ſi b eſt à la premiere place, on a les diſpoſitions bac, bca; enfin ſi c occupe la premiere place, on a de même deux diſpoſitions, ſavoir cab, cba. Et par conſéquent le nombre total des diſpoſitions eſt $3.2=6$.

Si on a quatre lettres, $abcd$, chacune peut occuper la premiere place; & dans chacun de ces cas les trois autres peuvent former ſix diſpoſitions différentes, comme

nous venons de voir. Le nombre total des permutations eſt donc $4.6 = 24 = 4.3.2.1$.

Si on a cinq lettres, *abcde*, chacune des cinq pouvant également ſe trouver la premiere, & les quatre autres ſouffrir vingt-quatre permutations, il s'enſuit que le nombre total des permutations ſera $5.24 = 120 = 5.4.3.2.1$.

356.

Quelque grand par conſéquent que ſoit le nombre des lettres, on voit aſſez que, pourvu qu'elles ſoient toutes différentes, il eſt facile de déterminer le nombre de toutes les permutations, & qu'on pourra faire uſage de la table ſuivante:

Nombre des Lettres:	Nombre des Permutations:
I.	$1 = 1$.
II.	$2.1 = 2$.
III.	$3.2.1 = 6$.
IV.	$4.3.2.1 = 24$.
V.	$5.4.3.2.1 = 120$.
VI.	$6.5.4.3.2.1 = 720$.
VII.	$7.6.5.4.3.2.1 = 5040$.
VIII.	$8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320$.
IX.	$9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362880$.
X.	$10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3628800$.

357.

Mais comme nous l'avons inſinué, les nombres de cette table ne peuvent s'employer que dans les cas où toutes les lettres ſont différentes; car ſi deux ou pluſieurs d'entre elles ſont ſemblables, le nombre des permutations devient beaucoup moindre; & ſi toutes les lettres ſont les mêmes, on n'a qu'une ſeule diſpoſition. Nous allons donc voir comment les nombres de la table doivent être diminués ſuivant le nombre des lettres ſemblables.

358.

Quand deux lettres ſont données, & que ces lettres ſont les mêmes, les deux diſpoſitions ſe réduiſent à une ſeule, & par conſéquent le nombre que nous avions trouvé ci-deſſus ſe réduit à la moitié, c'eſt-à-dire qu'il faut le diviſer par 2. Si on a trois lettres ſemblables, on voit ſix permutations ſe réduire à une ſeule; d'où il ſuit que les nombres de la table doivent être diviſés par $6=3.2.1$. Et par une raiſon ſemblable, ſi quatre lettres ſont les mêmes, il faudra diviſer les nombres trouvés par 24 ou par 4.3.2.1 &c.

Il eſt donc facile maintenant de déterminer, par exemple, de combien de permutations les lettres $aaabbc$ ſont ſuſceptibles. Elles ſont au nombre de ſix, & par conſéquent ſi elles étoient toutes différentes, elles admettroient 6.5.4.3.2.1 permutations. Mais puiſque a ſe trouve trois fois dans ces lettres, il faudra diviſer ce nombre de permutations par 3.2.1; & puiſque

b ſe rencontre deux fois, il faudra encore diviſer par 2.1; le nombre des permutations cherché ſera donc $=\frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1}=5.4.3$ $=60$.

359.

Il nous ſera donc facile à préſent de déterminer les coefficiens de tous les termes d'une puiſſance quelconque. Nous en donnerons un exemple ſur la ſeptieme puiſſance $(a+b)^7$.

Le premier terme eſt a^7, qui ne ſe rencontre qu'une fois; & comme tous les autres termes ont chacun ſept lettres, il s'enſuit que le nombre de toutes les permutations pour chaque terme ſeroit 7.6.5.4.3.2.1, ſi toutes les lettres étoient diſſemblables. Mais puiſque dans le ſecond terme a^6b on trouve ſix lettres ſemblables, il faudra diviſer ce produit-là par 6.5.4.3.2.1, d'où il ſuit que le coefficient eſt $=\frac{7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1}=\frac{7}{1}$.

Dans le troiſieme terme a^5bb, on trouve cinq fois la même lettre a, & deux fois la

même lettre b; il faut donc divifer ce nombre d'abord par 5.4.3.2.1, & enfuite encore par 2.1; d'où réfulte le coefficient $\frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1.1.2} = \frac{7.6}{1.2}$.

Le quatrieme terme a^4b^3 contient quatre fois la lettre a, & trois fois la lettre b; par conféquent le nombre total des permutations de fept lettres, doit être divifé en premier lieu par 4.3.2.1, & en fecond lieu par 3.2.1, ou par 1.2.3, & le fecond coefficient devient $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.1.2.3} = \frac{7.6.5}{1.2.3}$.

On trouvera de la même maniere $\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ pour le coefficient du cinquieme terme, & ainfi des autres; au moyen de quoi la regle donnée plus haut fe trouve démontrée (*).

(*) Souvent auffi on tire de la théorie des *Combinaifons* les regles qu'on vient de voir pour la détermination des coefficiens des termes de la puiffance d'un binome; c'eft peut-être avec quelque avantage, parce que tout fe rapporte alors à une feule formule.

Pour indiquer d'abord en paffant la différence qui eft entre les permutations & les combinaifons, remarquons que dans celles-là on demande de combien de manieres différentes, par exemple, les lettres qui compofent une

360.

360.

Ces confidérations nous conduifent encore plus loin, & nous montrent auffi comment on doit trouver toutes les puiffances

certaine formule peuvent changer de place, au lieu que dans les combinaifons on demande combien de fois ces lettres peuvent être prifes ou multipliées enfemble une à une, deux à deux, trois à trois.

Qu'on ait, par exemple, la formule abc, on a vu que les lettres qui la compofent fouffrent fix permutations, favoir abc, acb, bac, bca, cab, cba. Mais s'il s'agit des combinaifons, je dis que fi on prend ces trois lettres une à une, on a trois combinaifons, favoir a, b & c. Que fi on les prend deux à deux, on a les trois combinaifons ab, ac & bc. Enfin, que fi on prend ces trois lettres trois à trois, on a la feule combinaifon abc.

Or de même qu'on prouve que 5 chofes différentes admettent 1.2.3.4 -- 5 permutations différentes, & que fi de ces 5 chofes il y en a r égales, le nombre des permutations eft $\frac{1.2.3.4 \ldots 5}{1.2.3 \ldots r}$; on prouve auffi que 5 chofes peuvent fe prendre r à r, le nombre $\frac{5.(5-1).(5-2) \ldots (5-r+1)}{1.2.3 \ldots r}$ de fois, ou que de ces 5 chofes on peut en prendre r d'autant de manieres différentes. Cela fait que fi on nomme 5 l'expofant de la puiffance à laquelle on veut élever le

des racines qui sont composées de plus de deux termes (*). Nous en ferons l'application à la troisieme puissance de $a+b+c$, dont les termes doivent être formés de

binome $a+b$, & r l'exposant de la lettre b dans un terme quelconque, c'est toujours cette formule $\frac{s.\overline{s-1}.\overline{s-2}\ldots\overline{s-r+1}}{1.2.3\ldots r}$ qui exprime le coefficient de ce terme. Ainsi dans l'exemple de cet article 359 ou $s=7$, on a pour le troisieme terme a^5bb, l'exposant $r=2$, & par conséquent le coefficient $=\frac{7.6}{1.2}$.

Pour le quatrieme terme on a $r=3$ & le coefficient $=\frac{7.6.5}{1.2.3}$, & ainsi de suite. Ce sont, comme on voit, les mêmes résultats que par les permutations.

On a des traités complets & étendus sur la théorie des combinaisons, qu'on doit à Messieurs *Frenicle*, de *Monmort*, *Jacques Bernoulli*, &c. Ces deux derniers ont approfondi cette théorie, relativement à son grand usage, dans le calcul des probabilités, calcul qui mériteroit bien qu'on en eût un traité élémentaire en françois, non-seulement à cause des nombreuses applications qu'on en fait aujourd'hui, mais aussi parce qu'il exerce l'esprit plus que tout autre, & de la maniere la plus agréable.

(*) On nomme ces racines ou ces quantités composées de plus de deux termes, des *polynomes*, pour les distinguer des *binomes* ou des quantités complexes à deux termes.

toutes les combinaisons possibles de trois lettres, & où chaque terme doit avoir pour coefficient, comme ci-dessus, le nombre de ses permutations.

La troisieme puissance de $(a+b+c)^3$ sera, sans passer par la multiplication, $a^3 + 3aab + 3aac + 3abb + 6abc + 3acc + b^3 + 3bbc + 3bcc + c^3$.

Supposons $a=1$, $b=1$, $c=1$, le cube de $1+1+1$, ou de 3, sera
$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27$.
Ce résultat est juste & confirme la regle.

Si l'on avoit supposé $a=1$, $b=1$ & $c=-1$, on auroit trouvé pour le cube de $1+1-1$, c'est-à-dire de 1
$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1$.

CHAPITRE XII.

Du Développement des Puiſſances irrationnelles par des ſuites infinies.

361.

COMME nous avons fait voir de quelle maniere on doit trouver une puiſſance quelconque de la racine $a+b$, quelque grand que ſoit l'expoſant, nous ſommes en état d'exprimer généralement la puiſſance de $a+b$, dont l'expoſant ſeroit indéterminé. Il eſt évident que ſi on indique cet expoſant par n, on aura par la regle donnée plus haut (art. 348 & ſuiv.):

$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n\cdot 3}{4}a^{n-4}b^4 +$, &c.

362.

Que ſi on demandoit la même puiſſance de la racine $a-b$, on ne feroit que changer

les ſignes du ſecond, quatrieme, ſixieme, &c. terme, & on auroit $(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 -$, &c.

363.

Ces formules ſont d'une utilité inſigne; car elles ſervent auſſi à exprimer toutes les eſpeces de radicaux. Nous avons fait voir que toutes les quantités irrationnelles peuvent ſe mettre ſous la forme de puiſſances dont les expoſans ſont rompus, & que $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, & $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$, &c. on aura donc auſſi

$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, & $\sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}}$, &c.

C'eſt pourquoi, ſi l'on veut trouver la racine quarrée de $a+b$, on n'a beſoin que de ſubſtituer à l'expoſant n la fraction $\frac{1}{2}$ dans la formule générale de l'art. 361, & on aura d'abord pour les coefficiens,

$\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$; $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$; $\frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6}$; $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}$; $\frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}$; $\frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}$. Enſuite $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ & $a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; $a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$; $a^{n-3} = \frac{1}{aa\sqrt{a}}$ &c. ou bien on pourra exprimer ces puiſſances de a de cette autre maniere : $a^n = \sqrt{a}$; $a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a}$; $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$; $a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3}$; $a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4}$, &c.

364.

Cela poſé, la racine quarrée de $a+b$ pourra s'exprimer de la maniere qui ſuit:

$$\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \frac{1}{2} b \frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} bb \frac{\sqrt{a}}{aa} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} b^3 \frac{\sqrt{a}}{a^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} b^4 \frac{\sqrt{a}}{a^4}, \text{ \&c.}$$

365.

Si donc a eſt un nombre quarré, on pourra aſſigner la valeur de $\sqrt{a}$, & par

conſéquent la racine quarrée de $a+b$ pourra être exprimée par une ſuite infinie ſans aucun ſigne radical.

Soit, par exemple, $a = cc$, on aura $\sqrt{a} = c$; donc $\sqrt{(cc+b)} = c + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{c} - \frac{1}{8} \frac{bb}{c^3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{b^3}{c^5} - \frac{5}{128} \cdot \frac{b^4}{c^7}$, &c.

On voit par là qu'il n'eſt aucun nombre dont on ne puiſſe extraire la racine quarrée de la même maniere ; puiſque tout nombre peut ſe décompoſer en deux parties, dont l'une ſoit un quarré repréſenté par cc. Si on cherche, par exemple, la racine quarrée de 6, on fera $6 = 4 + 2$, par conſéquent $cc = 4$, $c = 2$, $b = 2$; d'où réſulte $\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$ &c. Si on vouloit ne prendre que les deux premiers termes de cette ſuite, on auroit $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, dont le quarré $\frac{25}{4}$ eſt de $\frac{1}{4}$ plus grand que 6 ; mais ſi on conſidere trois termes on a $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, dont le quarré $\frac{1521}{256}$ eſt encore de $\frac{15}{256}$ trop petit.

366.

Puiſque dans cet exemple $\frac{5}{2}$ approche beaucoup déjà de la valeur vraie de $\sqrt{6}$, nous prendrons pour 6 la quantité équivalente $\frac{25}{4}-\frac{1}{4}$. Ainſi $cc=\frac{25}{4}$; $c=\frac{5}{2}$; $b=-\frac{1}{4}$; & calculant ſeulement les deux premiers termes, nous trouvons $\sqrt{6}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}$ $=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}-\frac{1}{20}=\frac{49}{20}$; le quarré de cette fraction étant $\frac{2401}{400}$, ne ſurpaſſe que de $\frac{1}{400}$ le quarré de $\sqrt{6}$.

Faiſant maintenant $6=\frac{2401}{400}-\frac{1}{400}$, de ſorte que $c=\frac{49}{20}$ & $b=-\frac{1}{400}$; & ne prenant encore que les deux premiers termes, on a $\sqrt{6}=\frac{49}{20}+\frac{1}{2}\cdot-\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}$ $-\frac{1}{1960}=\frac{4801}{1960}$, dont le quarré eſt $=\frac{23049601}{3841600}$. Or 6 réduit au même dénominateur eſt $=\frac{23049600}{3841600}$; l'erreur n'eſt donc plus que de $\frac{1}{3841600}$.

367.

On pourra de la même maniere exprimer la racine cubique de $a+b$ par une ſérie infinie. Car puiſque $\sqrt[3]{(a+b)}=(a+b)^{\frac{1}{3}}$, on aura dans la formule générale $n=\frac{1}{3}$, & pour les coefficiens, $\frac{n}{1}=\frac{1}{3}$; $\frac{n-1}{2}=-\frac{1}{3}$; $\frac{n-2}{3}=-\frac{5}{9}$; $\frac{n-3}{4}=-\frac{2}{3}$; $\frac{n-4}{5}=-\frac{11}{15}$, &c. & quant aux puiſſances de a, on aura $a^n=\sqrt[3]{a}$; $a^{n-1}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a}$; $a^{n-2}=\frac{\sqrt[3]{a}}{aa}$; $a^{n-3}=\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}$ &c.

donc $\sqrt[3]{(a+b)}=\sqrt[3]{a}+\frac{1}{3}\cdot b\frac{\sqrt[3]{a}}{a}-\frac{1}{9}\cdot bb\frac{\sqrt[3]{a}}{aa}$ $+\frac{5}{81}\cdot b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}-\frac{10}{243}\cdot b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}$, &c.

368.

Si donc a eſt un cube, ou $a=c^3$, on a $\sqrt[3]{a}=c$, & les ſignes radicaux s'évanouiront; car on aura

$$\sqrt[3]{(c^3+b)}=c+\frac{1}{3}\cdot\frac{b}{cc}-\frac{1}{9}\cdot\frac{bb}{c^6}+\frac{5}{81}\cdot\frac{b^3}{c^8}-\frac{10}{243}\cdot\frac{b^4}{c^{11}}$$

+, &c.

369.

Voilà donc une formule, au moyen de laquelle on pourra trouver *par approximation*, comme on dit, la racine cubique d'un nombre quelconque; puiſque tout nombre peut ſe partager en deux parties, comme $c^3 + b$, dont la premiere ſoit un cube.

On voudroit, par exemple, déterminer la racine cubique de 2; on repréſentera 2 par $1 + 1$, de façon que $c = 1$ & $b = 1$, par conſéquent $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$, &c. les deux premiers termes de cette ſuite ſont $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, dont le cube $\frac{64}{27}$ eſt trop grand de $\frac{10}{27}$. Qu'on faſſe donc $2 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$, on aura $c = \frac{4}{3}$ & $b = -\frac{10}{27}$, & par conſéquent $\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{-10}{27}}{\frac{16}{9}}$. Ces deux termes ſont $\frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, dont le cube eſt $\frac{753571}{373248}$. Or $2 = \frac{746496}{373248}$, ainſi l'erreur eſt $\frac{7075}{373248}$. Et voilà

comment on pourra approcher toujours davantage, & d'autant plus vîte qu'on prendra un plus grand nombre de termes (*).

(*) M. *Halley* a donné dans les *Tranſactions philoſophiques* de 1694 une méthode très-belle & très-générale pour extraire par approximation les racines d'un degré quelconque. Monſieur *Halley* prouve qu'on a généralement $\sqrt[m]{a^m \pm b} = \frac{m-2}{m-1} a + \sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(mm-m)a^{m-2}}}$. Ceux qui ne ſeront pas à portée de conſulter les *Tranſactions philoſophiques*, trouveront des éclairciſſemens ſur la formation & ſur les uſages de cette formule, dans la nouvelle édition des *Leçons élémentaires de Mathématiques* de M. l'Abbé de *la Caille*, publiées par M. l'Abbé *Marie*.

CHAPITRE XIII.

Du Développement des Puissances négatives.

370.

Nous avons fait voir plus haut qu'on peut exprimer $\frac{1}{a}$ par a^{-1}; on peut donc de même exprimer $\frac{1}{a+b}$ par $(a+b)^{-1}$; de sorte que la fraction $\frac{1}{a+b}$ peut être regardée comme une puissance de $a+b$, c'est-à-dire celle dont l'exposant est -1; & il s'ensuit de-là que la série trouvée ci-dessus pour la valeur de $(a+b)^n$ s'étend aussi à ce cas.

371.

Puis donc que $\frac{1}{a+b}$ signifie autant que $(a+b)^{-1}$, supposons dans la formule citée $n=-1$; nous aurons d'abord pour les coefficiens: $\frac{n}{1}=-1$; $\frac{n-1}{2}=-1$; $\frac{n-2}{3}=-1$; $\frac{n-3}{4}=-1$, &c. & ensuite pour les puissances de a:

$a^n=a^{-1}=\frac{1}{a}$; $a^{n-1}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}$; $a^{n-2}=\frac{1}{a^3}$; $a^{n-3}=\frac{1}{a^4}$, &c. ainsi $(a+b)^{-1}=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}$ &c. & c'est la même suite que nous avons déjà trouvée plus haut par la division.

372.

De plus $\frac{1}{(a+b)^2}$, étant autant que $(a+b)^{-2}$, réduisons aussi cette formule en une suite infinie. Il faudra pour cet effet supposer $n=-2$, & nous aurons pour les coefficiens d'abord $\frac{n}{1}=-\frac{2}{1}$; $\frac{n-1}{2}=-\frac{3}{2}$; $\frac{n-2}{3}=-\frac{4}{3}$; $\frac{n-3}{4}=-\frac{5}{4}$, &c. Et pour les puissances de a: $a^n=\frac{1}{a^2}$; $a^{n-1}=\frac{1}{a^3}$; $a^{n-2}=\frac{1}{a^4}$; $a^{n-3}=\frac{1}{a^5}$, &c. Nous obtenons donc $(a+b)^{-2}=\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{2}{1}\cdot\frac{b}{a^3}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{bb}{a^4}-\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{b^3}{a^5}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{b^4}{a^6}$, &c.

Or $\frac{2}{1}=2$; $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=3$; $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=4$; $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}=5$, &c. Par conséquent nous avons

$$\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}-2\frac{b}{a^3}+3\frac{b^2}{a^4}-4\frac{b^3}{a^5}+5\frac{b^4}{a^6}-6\frac{b^5}{a^7}+7\frac{b^6}{a^8}, \&c.$$

373.

Continuons & supposons $n=-3$, nous aurons une suite qui exprimera la valeur de $\frac{1}{(a+b)^3}$ ou de $(a+b)^{-3}$. Les coefficiens seront: $\frac{n}{1}=-\frac{3}{1}$; $\frac{n-1}{2}=-\frac{4}{2}$; $\frac{n-2}{3}=-\frac{5}{3}$; $\frac{n-3}{4}=-\frac{6}{4}$, &c. & les puissances de a deviennent: $a^n=\frac{1}{a^3}$; $a^{n-1}=\frac{1}{a^4}$; $a^{n-2}=\frac{1}{a^5}$ &c. ce qui nous donne: $\frac{1}{(a+b)^3}=\frac{1}{a^3}$

$$-\frac{3}{1}\frac{b}{a^4}+\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\frac{b^2}{a^5}-\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6}+\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7}$$

$$\&c.=\frac{1}{a^3}-3\frac{b}{a^4}+6\frac{b^2}{a^5}-10\frac{b^3}{a^6}+15\frac{b^4}{a^7}-21\frac{b^5}{a^8}+28\frac{b^6}{a^9}-36\frac{b^7}{a^{10}}+45\frac{b^8}{a^{11}} \&c.$$

Faisons encore $n=-4$, nous aurons pour les coefficiens: $\frac{n}{1}=-\frac{4}{1}$; $\frac{n-1}{2}=-\frac{5}{2}$; $\frac{n-2}{3}=-\frac{6}{3}$; $\frac{n-3}{4}=-\frac{7}{4}$ &c. & pour les puissances: $a^n=\frac{1}{a^4}$; $a^{n-1}=\frac{1}{a^5}$; $a^{n-2}=\frac{1}{a^6}$; $a^{n-3}=\frac{1}{a^7}$; $a^{n-4}=\frac{1}{a^8}$, &c. d'où l'on tire:

$$\frac{1}{(a+b)^4}=\frac{1}{a^4}-\frac{4}{1}\cdot\frac{b}{a^5}+\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b^2}{a^6}-\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7}+\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{b^4}{a^8} \&c.=\frac{1}{a^4}-4\frac{b}{a^5}+10\frac{b^2}{a^6}-20\frac{b^3}{a^7}+35\frac{b^4}{a^8}-56\frac{b^5}{a^9}+, \&c.$$

374.

Les différens cas que nous venons de considérer nous mettent en état maintenant de conclure avec certitude qu'on aura généralement pour une telle puissance négative quelconque de $a+b$:

$$\frac{1}{(a+b)^m}=\frac{1}{a^m}-\frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^{m+2}}-\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^{m+3}}+, \&c.$$

Et on peut, moyennant cette formule, transformer toutes ces especes de fractions en suites infinies, en substituant même à m des fractions, afin d'exprimer des formules irrationnelles.

375.

Pour éclaircir encore davantage cette matiere, nous joindrons ici les considérations qui suivent.

Nous avons trouvé :

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} + \text{\&c.}$$

Si nous multiplions donc cette suite par $a+b$, il faut que le produit soit $= 1$: & cela se trouve vrai, comme on va le voir, en effectuant la multiplication :

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} + \text{\&c.}$$

$$a+b$$

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} + \text{\&c.}$$

+

$$+ \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} - \text{\&c.}$$

$$1$$

376.

Nous avons trouvé aussi $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7}$ &c. Si on multiplie donc cette suite par $(a+b)^2$, il faut que le produit soit pareillement $= 1$. Or $(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$, voici donc le plan de l'opération :

$$\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} + \text{\&c.}$$

$$aa + 2ab + bb$$

$$1 - \frac{2b}{a} + \frac{3bb}{aa} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} - \frac{6b^5}{a^5} + \text{\&c.}$$

$$+ \frac{2b}{a} - \frac{4bb}{aa} + \frac{6b^3}{a^3} - \frac{8b^4}{a^4} + \frac{10b^5}{a^5} - \text{\&c.}$$

$$+ \frac{bb}{aa} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{4b^5}{a^5} + \text{\&c.}$$

1 produit que la nature de la chose exigeoit.

377.

Que si l'on ne multiplioit que par $a+b$ la série trouvée pour la valeur de $\frac{1}{(a+b)^2}$, il faudroit que le produit répondît à la fraction $\frac{1}{a+b}$, ou fût égal à la série trouvée ci-dessus, $\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}$ &c. & c'est ce que la multiplication effective confirmera.

$$\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3bb}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6} \text{ \&c.}$$
$$a+b$$

$$\frac{1}{a}-\frac{2b}{aa}+\frac{3bb}{a^3}-\frac{4b^3}{a^4}+\frac{5b^4}{a^5} \text{ \&c.}$$
$$+\frac{b}{aa}-\frac{2bb}{a^3}+\frac{3b^3}{a^4}-\frac{4b^4}{a^5} \text{ \&c.}$$

$$\frac{1}{a}-\frac{b}{aa}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}- \text{ \&c.}$$

SECTION TROISIEME.

Des Rapports & des Proportions.

CHAPITRE PREMIER.

Du Rapport arithmétique, ou de la différence entre deux Nombres.

378.

DEUX grandeurs sont ou égales l'une à l'autre, ou elles ne le sont pas. Dans ce dernier cas où l'une est plus grande que l'autre, on peut envisager leur inégalité sous deux points de vue différens; on peut demander *de combien* une des quantités est plus grande que l'autre? On peut aussi demander *combien de fois* l'une est plus grande que l'autre? Les déterminations qui forment les réponses à ces deux questions, se

nomment toutes deux des rapports ou des raiſons ; on a coutume de nommer la premiere *rapport arithmétique*, & la ſeconde *rapport géométrique* ; ſans cependant que ces dénominations ayent aucune liaiſon avec la choſe même ; c'eſt arbitrairement qu'elles ont été adoptées.

379.

On s'imagine bien ſans doute qu'il faut que les grandeurs dont nous parlons ſoient d'une même eſpece, puiſque ſans cela on ne pourroit rien déterminer au ſujet de leur égalité ou de leur inégalité. Il ſeroit abſurde, par exemple, de demander ſi deux livres & trois aunes ſont des quantités égales ? C'eſt pourquoi dans ce qui va ſuivre il ne peut être queſtion que de quantités d'une même eſpece ; & comme elles peuvent toujours être aſſignées en nombres, ce n'eſt auſſi, comme nous en avons averti dès le commencement, que des nombres dont nous traiterons.

380.

Quand on demande donc de deux nombres donnés, de combien l'un eſt plus grand que l'autre, la réponſe à cette queſtion détermine le rapport arithmétique de ces deux nombres. Or puiſque cette détermination ſe fait en indiquant la différence des deux nombres, il s'enſuit qu'un rapport arithmétique n'eſt autre choſe que la différence entre deux nombres. Et comme ce mot de *différence* nous paroît une expreſſion plus propre, nous réferverons celles de *rapport* ou *raiſon*, pour exprimer les rapports géométriques.

381.

La différence entre deux nombres ſe trouve, comme on ſait, en ſouſtrayant le plus petit du plus grand ; rien de plus facile par conſéquent que de réſoudre la queſtion, de combien l'un eſt plus grand que l'autre. Et dans le cas donc où les nombres ſont

égaux, la différence étant nulle ou zéro; si l'on demande de combien un des nombres est plus grand que l'autre, on répondra, de rien. Par exemple, 6 étant $=2.3$; la différence entre 6 & 2.3 est 0.

382.

Mais lorsque les deux nombres ne sont pas égaux, comme 5 & 3, & qu'on demande de combien 5 est plus grand que 3, la réponse est, de 2; & elle se détermine en soustrayant 3 de 5. De même 15 est plus grand que 5, de 10; & 20 surpasse 8 de 12.

383.

Nous avons donc trois choses à considérer ici: 1°. le plus grand des deux nombres; 2°. le plus petit, & 3°. la différence. Et ces trois quantités ont entr'elles une liaison telle, que deux des trois étant données, elles déterminent toujours la troisieme.

Soit le plus grand nombre $=a$, le plus petit $=b$, & la différence $=d$: on trou-

vera la différence d en soustrayant b de a, de façon que $d=a-b$; d'où l'on voit comment a & b étant donnés on peut trouver d.

384.

Mais si c'est la différence qui est donnée avec le plus petit des deux nombres, ou b, ce sera le nombre plus grand qu'on pourra déterminer, savoir en ajoutant ensemble la différence & le nombre plus petit, ce qui donne $a=b+d$. Car si on ôte de $b+d$ le moindre nombre b, il reste d, qui est la différence connue. Soit le moindre nombre $=12$, la différence $=8$, le nombre plus grand sera $=20$.

385.

Enfin si outre la différence d le plus grand nombre a est donné, on trouve l'autre nombre b en soustrayant la différence du plus grand nombre, ce qui fait qu'on a $b=a-d$. Car si j'ôte le nombre $a-d$ du nombre

plus grand a, il reſte d, qui eſt la différence donnée.

386.

La liaiſon entre ces trois nombres a, b, d eſt donc telle qu'on en tire les trois déterminations ſuivantes : 1°. $d=a-b$; 2°. $a=b+d$; 3°. $b=a-d$; & ſi une de ces trois comparaiſons eſt juſte, il faut néceſſairement que les deux autres le ſoient auſſi. Donc en général ſi $z=x+y$, il faut abſolument que $y=z-x$ & $x=z-y$.

387.

Il eſt à remarquer au ſujet de ces raiſons arithmétiques, que ſi l'on ajoute aux deux nombres a & b un nombre c pris à volonté, ou qu'on l'en ſouſtraie, la différence reſte la même. C'eſt-à-dire que ſi d eſt la différence entre a & b, ce nombre d ſera auſſi la différence entre $a+c$ & $b+c$, & entre $a-c$ & $b-c$. Par exemple, la différence entre les nombres 20 & 12 étant 8,

cette différence reſtera la même, quelque nombre qu'on ajoute à ces nombres 20 & 12, & quelque nombre qu'on en retranche.

388.

La preuve en eſt évidente. Car ſi $a-b=d$, on a auſſi $(a+c)-(b+c)=d$; & de même $(a-c)-(b-c)=d$.

389.

Si on double les deux nombres a & b, la différence deviendra double auſſi. Ainſi quand $a-b=d$, on aura $2a-2b=2d$; & en général $na-nb=nd$, quelque nombre qu'on prenne pour n.

CHAPITRE II.

Des Proportions arithmétiques.

390.

LORSQUE deux rapports arithmétiques ſont égaux, cette égalité ſe nomme une *proportion arithmétique.*

Ainſi quand $a-b=d$ & $p-q=d$, de ſorte que la différence eſt la même entre les nombres p & q, qu'entre les nombres a & b, on dit que ces quatre nombres forment une proportion arithmétique; on l'écrit $a-b=p-q$, & on indique clairement par là que la différence entre a & b eſt égale à la différence entre p & q.

391.

Une proportion arithmétique conſiſte donc dans quatre termes, qui doivent être tels, que ſi on ſouſtrait le ſecond du premier, le reſte ſe trouve le même qu'en

ſouſtrayant le quatrieme du troiſieme. Ainſi ces quatre nombres 12, 7, 9, 4 forment une proportion arithmétique, parce que $12-7=9-4$ (*).

392.

Quand on a une proportion arithmétique comme $a-b=p-q$, on peut faire changer de place au ſecond & au troiſieme terme, en écrivant $a-p=b-q$; cette égalité ne ſera pas moins vraie. Car puiſque $a-b=p-q$, qu'on ajoute d'abord b des deux côtés, on aura $a=b+p-q$. Qu'on ſouſtraie enſuite p des deux côtés, on aura $a-p=b-q$.

Ainſi, comme $12-7=9-4$, on a auſſi $12-9=7-4$.

393.

On peut auſſi dans toute proportion arithmétique, mettre le ſecond terme à la place

(*) Pour déſigner que ces nombres ſont une telle proportion, quelques-uns les écrivent ainſi: 12.7:9.4.

du premier, si on fait en même temps une transposition pareille du troisieme & du quatrieme. C'est-à-dire que si $a-b=p-q$; on aura aussi $b-a=q-p$. Car $b-a$ est la négative de $a-b$, & de même $q-p$ est la négative de $p-q$. Ainsi, puisque $12-7=9-4$, on a pareillement $7-12=4-9$.

394.

Mais la propriété principale d'une proportion arithmétique quelconque est celle-ci : que la somme du second & du troisieme terme est égale constamment à la somme du premier & du quatrieme terme. Cette propriété, à laquelle il faut bien faire attention, s'exprime aussi de cette façon : la somme des *moyens* est égale à la somme des *extrêmes*. Ainsi, comme $12-7=9-4$, on a $7+9=12+4$; & en effet la somme est 16 de part & d'autre.

395.

Soit, pour démontrer cette propriété principale, $a-b=p-q$; si on ajoute de part & d'autre $b+q$, on a $a+q=b+p$; c'est-à-dire que la somme du premier & du quatrieme terme est égale à la somme du second & du troisieme. Et réciproquement, si quatre nombres, a, b, p, q, sont tels que la somme du second & du troisieme est égale à la somme du premier & du quatrieme, c'est-à-dire que $b+p=a+q$, on en conclut, sans pouvoir se tromper, que ces nombres sont en proportion arithmétique, & que $a-b=p-q$. En effet, puisque $a+q=b+p$, si on soustrait de l'un & de l'autre côté $b+q$, on obtient $a-b=p-q$.

Ainsi les nombres 18, 13, 15, 10 étant tels que la somme des moyens $13+15=28$ est égale à la somme des extrêmes $18+10=28$, on est certain qu'ils forment aussi une proportion arithmétique, & par conséquent que $18-13=15-10$.

396.

Il eſt facile au moyen de la propriété dont nous parlons, de réſoudre la queſtion qui ſuit : les trois premiers termes d'une proportion arithmétique étant donnés, trouver le quatrieme ? Soient a, b, p ces trois premiers termes, & exprimons par q le quatrieme qu'il s'agit de déterminer, nous aurons $a+q=b+p$; ſouſtrayant enſuite a de part & d'autre, nous obtenons $q=b+p-a$. Ainſi le quatrieme terme ſe trouve en ajoutant enſemble le ſecond & le troiſieme, & en ſouſtrayant de cette ſomme le ſecond. Suppoſez, par exemple, que 19, 28, 13 ſoient les trois premiers termes donnés, la ſomme du ſecond & du troiſieme eſt $=41$; ôtez-en le premier qui eſt 19, il reſte 22 pour le quatrieme terme cherché, & la proportion arithmétique ſera indiquée par $19-28=13-22$, ou par $28-19=22-13$, ou par $28-22=19-13$.

397.

Lorſque dans une proportion arithmétique le ſecond terme eſt égal au troiſieme, on n'a que trois nombres, mais dont la propriété eſt telle, que le premier moins le ſecond fait autant que le ſecond moins le troiſieme, ou bien que la différence entre le premier & le ſecond nombre eſt égale à la différence entre le ſecond & le troiſieme. Les trois nombres 19, 15, 11 ſont de cette eſpece, puiſque $19-15=15-11$.

398.

On dit de trois nombres tels que ceux-là, qu'ils forment une proportion arithmétique continue, & on le déſigne quelquefois par le ſigne $\div$, en écrivant, par exemple, $\div 19, 15, 11$. On nomme auſſi ces ſortes de proportions des *progreſſions arithmétiques*, ſur-tout s'il y a un plus grand nombre de termes qui ſe ſuivent conformément à la même loi.

Une progreſſion arithmétique peut être ou *croiſſante* ou *décroiſſante*. La premiere dénomination lui convient quand les termes vont en augmentant, c'eſt-à-dire, quand le ſecond ſurpaſſe le premier, & que le troiſieme ſurpaſſe d'autant le ſecond, comme ces nombres-ci, 4, 7, 10. La progreſſion décroiſſante eſt celle où les termes vont toujours en diminuant de la même quantité, tels ſont les nombres 9, 5, 1.

399.

Suppoſons que les nombres a, b, c ſoient en progreſſion arithmétique, il faut que $a-b=b-c$, d'où il ſuit, à cauſe de l'égalité de la ſomme des extrêmes & de celle des moyens, que $2b=a+c$; & ſi on ſouſtrait a de part & d'autre, on a $c=2b-a$.

400.

Ainſi quand les deux premiers termes, a, b, d'une progreſſion arithmétique ſont donnés, on trouve le troiſieme, en ôtant le premier du double du ſecond. Soient 1 & 3 les deux premiers termes d'une progreſſion arithmétique, le troiſieme ſera $=2.3-1=5$. Et ces trois nombres 1, 3, 5 donnent la proportion $1-3=3-5$.

401.

On peut, en ſuivant la même voie, aller plus loin & continuer la progreſſion arithmétique auſſi loin qu'on voudra: on n'a qu'à chercher le quatrieme terme moyennant le ſecond & le troiſieme, de la même maniere qu'on a déterminé le troiſieme au moyen du premier & du ſecond, & ainſi de ſuite. Soit a le premier terme, & b le ſecond, le troiſieme ſera $=2b-a$, le quatrieme $=4b-2a-b=3b-2a$, le cinquieme $6b-4a-2b+a=4b-3a$, le ſixieme $=8b-6a-3b+2a=5b-4a$, le ſeptieme $=10b-8a-4b+3a=6b-5a$.

CHAPITRE III.

Des Progressions Arithmétiques.

402.

Nous avons insinué qu'on nomme *progression arithmétique* une suite de nombres composée d'autant de termes qu'on veut, lesquels croissent ou décroissent toujours d'une même quantité.

Ainsi les nombres naturels écrits par ordre, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c. forment une progression arithmétique, parce qu'ils augmentent toujours de l'unité; & la suite 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, &c. est aussi une telle progression, puisque ces nombres diminuent constamment de 3.

403.

Le nombre ou la quantité dont les termes d'une progression arithmétique deviennent

plus grands ou plus petits, se nomme la *différence*. Ainsi quand le premier terme est donné avec la différence, on peut continuer la progression arithmétique aussi loin qu'on voudra. Soit, par exemple, le premier terme $=2$, & la différence $=3$, on aura la progression croissante qui suit: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, &c. où chaque terme se trouve en ajoutant la différence au terme précédent.

404.

On a coutume d'écrire les nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, &c. au-dessus des termes d'une telle progression arithmétique, afin qu'on reconnoisse d'abord le rang où un terme quelconque se trouve être dans la progression. On peut nommer ces nombres écrits au-dessus des termes, des *indices*; ainsi l'exemple cité s'écrira comme il suit:

Indices, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Prog. arithm. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29

&c. où l'on voit que 29 est le dixieme terme.

405.

Soit a le premier terme, & d la différence, la progression arithmétique continuera dans cet ordre :

1 2 3 4 5 6 7
$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d$, &c.
par lequel on voit qu'il est facile de trouver aussi-tôt un terme quelconque de la progression, sans qu'il soit nécessaire de connoître tous les termes précédens, & uniquement par le moyen du premier terme a & de la différence d. Par exemple, le dixieme terme sera $=a+9d$, le centieme terme $=a+99d$, & en général le terme n quelconque sera $=a+(n-1)d$.

406.

Lorsqu'on s'arrête en quelqu'endroit de la progression, il est essentiel de faire attention au premier & au dernier terme,

& l'indice du dernier indiquera le nombre des termes. Si donc le premier terme $=a$, la différence $=d$, & le nombre des termes $=n$, on a le dernier terme $=a+(n-1)d$, lequel se trouve par conséquent en multipliant la différence par le nombre des termes moins un, & ajoutant à ce produit le premier terme.

Supposez, par exemple, une progression arithmétique de cent termes, dont le premier $=4$, & que la différence soit $=3$, le dernier terme sera $=99.3+4=301$.

407.

Lorsqu'on connoît le premier terme a & le dernier z, avec le nombre des termes $=n$, on peut trouver la différence d. Car puisque le dernier terme $z=a+(n-1)d$, si on soustrait de part & d'autre a, on obtient $z-a=(n-1)d$. Ainsi en soustrayant le premier terme du dernier, on a le produit de la différence multipliée par le nombre des termes moins 1. On n'aura donc qu'à

diviser $z-a$ par $n-1$ pour obtenir la valeur cherchée de la différence d, qui fera $=\frac{z-a}{n-1}$. Ce résultat fournit cette regle : on soustrait le premier terme du dernier terme, & on divise le reste par le nombre des termes diminué de l'unité, le quotient est la différence ; par le moyen de laquelle on est en état ensuite d'écrire toute la progression.

408.

Supposons, par exemple, une progression arithmétique de neuf termes, dont le premier soit $=2$, & le dernier $=26$, & qu'il s'agisse de trouver la différence. Il faudra donc soustraire le premier terme 2 du dernier 26 & diviser le reste, qui est 24, par $9-1$, c'est-à-dire par 8 ; le quotient 3 sera égal à la différence cherchée, & la progression entiere sera :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26.

Supposons, pour donner un autre exemple, que le premier terme soit $=1$, le

dernier $=2$, le nombre des termes $=10$, & qu'on demande la progression arithmétique qui répond à ces suppositions, nous aurons aussi-tôt pour la différence $\frac{2-1}{10-1}=\frac{1}{9}$, & de-là nous conclurons que la progression est :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,	$1\frac{1}{9}$,	$1\frac{2}{9}$,	$1\frac{3}{9}$,	$1\frac{4}{9}$,	$1\frac{5}{9}$,	$1\frac{6}{9}$,	$1\frac{7}{9}$,	$1\frac{8}{9}$,	2.

Autre exemple. Soit le premier terme $=2\frac{1}{3}$, le dernier $=12\frac{1}{2}$, & le nombre des termes $=7$; on aura la différence $\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1}=\frac{10\frac{1}{6}}{6}=\frac{61}{36}=1\frac{25}{36}$, & par conséquent la progression :

1	2	3	4	5	6	7
$2\frac{1}{3}$,	$4\frac{1}{36}$,	$5\frac{13}{18}$,	$7\frac{5}{12}$,	$9\frac{1}{9}$,	$10\frac{29}{36}$,	$12\frac{1}{2}$.

409.

Maintenant si les données sont le premier terme a, le dernier terme z & la différence d, elles font trouver le nombre des termes n. Car puisque $z-a=(n-1)d$, on divisera des deux côtés par d, & on aura

$\frac{z-a}{d}=n-1$. Or n étant de 1 plus grand que $n-1$, on a $n=\frac{z-a}{d}+1$; par conséquent le nombre des termes se trouve en divisant la différence entre le premier & le dernier terme, ou $z-a$, par la différence de la progression, & en ajoutant l'unité au quotient $\frac{z-a}{d}$.

Soit, par exemple, le premier terme $=4$, le dernier $=100$, & la différence $=12$, le nombre des termes sera $\frac{100-4}{12}+1$; & voici quels seront ces neuf termes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,	16,	28,	40,	52,	64,	76,	88,	100.

Si le premier terme $=2$, le dernier $=6$, & la différence $=1\frac{1}{3}$, le nombre des termes sera $\frac{4}{1\frac{1}{3}}+1=4$, & ces quatre termes seront

1	2	3	4
2,	$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{2}{3}$,	6.

Soit encore le premier terme $=3\frac{1}{3}$, le dernier $=7\frac{2}{3}$, & la différence $=1\frac{4}{9}$, le

nombre des termes sera $=\frac{7\frac{2}{3}-3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}}+1$ $=4$; & voici ces quatre termes:

$3\frac{1}{3}$, $4\frac{7}{9}$, $6\frac{2}{9}$, $7\frac{2}{3}$.

410.

Mais il faut observer que le nombre des termes devant être nécessairement un nombre entier, si on n'avoit pas trouvé un tel nombre pour n dans les exemples de l'article précédent, les questions auroient été absurdes.

Toutes les fois donc qu'on ne trouvera pas un nombre entier pour la valeur de $\frac{z-a}{d}$, il sera impossible de résoudre la question; & par conséquent pour que ces sortes de questions soient possibles, il faut que $z-a$ soit divisible par d.

411.

On conclura de ce que nous avons dit, qu'on a toujours quatre quantités ou élémens à considérer dans une progression arithmétique:

I. le premier terme a,
II. le dernier terme z,
III. la différence d,
IV. le nombre des termes n.

Et les rapports de ces quantités les unes aux autres sont tels, que si on en connoît trois, on est en état de déterminer la quatrieme; car:

I. Si a, d & n sont connus, on a $z = a + (n-1)d$.

II. Si z, d & n sont connus, on a $a = z - (n-1)d$.

III. Si a, z & n sont connus, on a $d = \frac{z-a}{n-1}$.

IV. Si a, z & d sont connus, on a $n = \frac{z-a}{d} + 1$.

CHAPITRE IV.

De la Sommation des Progressions arithmétiques.

412.

On a souvent besoin aussi de prendre la somme d'une progression arithmétique. On la trouveroit en ajoutant ensemble tous les termes; mais comme cette addition seroit très-prolixe, quand la progression consiste en un grand nombre de termes, on a imaginé une regle, par le secours de laquelle on trouve très-facilement la somme dont nous parlons.

413.

Nous considérerons d'abord une progression de cette espece qui soit donnée, & telle que le premier terme $= 2$, la différence $= 3$, le dernier terme $= 29$, & le nombre des termes $= 10$:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

Nous voyons que dans cette progreſſion la ſomme du premier & du dernier terme $=31$; la ſomme du ſecond & du pénultieme $=31$; la ſomme du troiſieme & de l'antépénultieme $=31$, & ainſi de ſuite; & nous en conclurons que la ſomme de deux termes quelconques également éloignés l'un du premier & l'autre du dernier terme, eſt toujours égale à la ſomme du premier & du dernier terme.

414.

Il eſt facile d'en ſaiſir la raiſon. Car ſi nous ſuppoſons le premier terme $=a$, le dernier $=z$, & la différence $=d$, la ſomme du premier & du dernier terme eſt $=a+z$; & le ſecond terme étant $=a+d$ & le pénultieme $=z-d$, la ſomme de ces deux termes eſt auſſi $=a+z$. Enſuite le troiſieme terme étant $a+2d$, & l'antépénultieme $=z-2d$, il eſt clair que ces deux termes

ajoutés enſemble font auſſi $a+z$. On démontrera la même choſe de tous les autres.

415.

Pour parvenir donc à déterminer la ſomme de la progreſſion propoſée on écrira deſſous, terme pour terme, la même progreſſion priſe à rebours, & on fera l'addition des termes correſpondans, comme il ſuit :

$$\begin{array}{l} 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ 29+26+23+20+17+14+11+8+5+2 \\ \hline 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

Cette ſuite de termes égaux eſt évidemment égale au double de la ſomme de la progreſſion propoſée; or le nombre de ces termes égaux eſt 10, comme dans la progreſſion, & leur ſomme, par conſéquent, $=10.31=310$. Ainſi, puiſque cette ſomme eſt le double de la ſomme de la progreſſion arithmétique, il faut que cette ſomme cherchée ſoit $=155$.

416.

Si on procede de la même maniere à l'égard d'une progreſſion arithmétique quelconque, dont le premier terme ſoit $=a$, le dernier $=z$, & le nombre des termes $=n$; en écrivant ſous la progreſſion donnée la même progreſſion en rétrogradant, on aura, en faiſant l'addition terme à terme, une ſuite de n termes, dont chacun ſera $=a+z$; la ſomme de cette ſuite ſera par conſéquent $=n(a+z)$, & elle ſera le double de la ſomme de la progreſſion arithmétique propoſée; celle-ci ſera donc $=\frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Ce réſultat fournit une méthode facile pour trouver la ſomme d'une progreſſion arithmétique quelconque; elle ſe réduit à cette regle:

Multipliez la ſomme du premier & du dernier terme par le nombre des termes, la moitié du produit indiquera la ſomme de toute la progreſſion.

Ou, ce qui revient au même, multipliez la ſomme du premier & du dernier terme par la moitié du nombre des termes.

Ou bien, multipliez la moitié de la ſomme du premier & du dernier terme par le nombre total des termes. Ces deux manieres d'énoncer la regle, donnent également la ſomme de la progreſſion.

418.

Il ſera néceſſaire d'éclaircir cette regle par quelques exemples.

Soit d'abord la progreſſion des nombres naturels, 1, 2, 3 &c. juſqu'à 100, dont il s'agiſſe de trouver la ſomme. Celle-ci ſera par la premiere regle $=\frac{100.101}{2}=50.101=5050$.

Si on demande combien de coups une horloge ſonne en douze heures? il faudra ajouter enſemble les nombres 1, 2, 3 juſqu'à 12; or cette ſomme ſe trouve ſur le

champ $=\frac{12.13}{2}=6.13=78$. Que si l'on vouloit savoir la somme de la même progression continuée jusqu'à 1000, on trouveroit 500500; & la somme de cette progression, continuée jusqu'à 10000, feroit 50005000.

419.

Autre question. Quelqu'un achete un cheval, sous la condition que pour le premier clou il payera 5 sous, pour le second 8, pour le troisieme 11, & pareillement toujours 3 sous de plus pour chacun des suivans: le cheval a 32 clous, on demande combien il coûtera à l'acheteur?

On voit qu'il s'agit ici de trouver la somme d'une progression arithmétique, dont le premier terme est 5, la différence $=3$, & la somme des termes $=32$. Il faut donc commencer par déterminer le dernier terme; on le trouve (par la regle des articles 406, 411) $=5+31.3=98$. Maintenant la somme cherchée se trouve, sans difficulté, $=\frac{103.32}{2}=103.16$; d'où l'on conclut que le cheval coûte 1648 sous, ou 82 liv. 8 s.

420.

Soit en général le premier terme $=a$, la différence $=d$, & le nombre des termes $=n$; & qu'il s'agisse de trouver, par le moyen de ces données, la somme de toute la progression. Comme le dernier terme doit être $=a+(n-1)d$, la somme du premier & du dernier sera $=2a+(n-1)d$. Multipliant cette somme par le nombre des termes n, on a $2na+n(n-1)d$; donc la somme cherchée sera $=na+\frac{n(n-1)d}{2}$.

Cette formule appliquée à l'exemple précédent, où $a=5$, $d=3$, & $n=32$, donne $5.32+\frac{31.32.5}{2}=160+1488=1648$; la même somme qu'on avoit trouvée.

421.

S'il est question d'ajouter ensemble tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à n, on

a pour trouver cette ſomme : le premier terme $=1$, le dernier terme $=n$, & le nombre des termes $=n$; donc la ſomme cherchée $=\frac{nn+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

Si on fait $n=1766$, la ſomme de tous les nombres, depuis 1 juſqu'à 1766, ſera $=883.1767=1560261$.

422.

Soit propoſée la progreſſion des nombres impairs, 1, 3, 5, 7, &c. continuée juſqu'à n termes, & qu'on en demande la ſomme :

Le premier terme eſt ici $=1$, la différence $=2$, le nombre des termes $=n$; le dernier terme ſera donc $=1+(n-1)2=2n-1$, & par conſéquent la ſomme cherchée $=nn$.

Tout ſe réduit donc à multiplier le nombre des termes par lui-même. Ainſi quel que ſoit le nombre des termes de cette progreſſion qu'on ajoute enſemble, la ſomme ſera toujours un quarré, ſavoir le quarré du

nombre des termes. C'eſt ce que nous allons mettre ſous les yeux :

Indic. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 &c.
Progreſ. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 &c,
Somme, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 &c.

423.

Soit à préſent le premier terme $=1$, la différence $=3$, & le nombre des termes $=n$, on aura la progreſſion 1, 4, 7, 10, &c. dont le dernier terme ſera $=1+(n-1)3=3n-2$; donc la ſomme du premier & du dernier terme $=3n-1$, & par conſéquent la ſomme de cette progreſſion $=\frac{n(3n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$. Si on ſuppoſe $n=20$, la ſomme eſt $=10.59=590$.

424.

Soit encore le premier terme $=1$, la différence $=d$, & le nombre des termes $=n$, le dernier terme ſera $=1+(n-1)d$. Ajoutant le premier on a $2+(n-1)d$, & multipliant par le nombre des termes on

a $2n+n(n-1)d$, d'où se déduit la somme de la progression $=n+\frac{n(n-1)d}{2}$.

Joignons ici la petite table qui suit:

Si $d=1$, la somme est $=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$

$d=2$ — — — — $n+\frac{2n(n-1)}{2}=nn$

$d=3$ — — — — $n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$

$d=4$ — — — — $n+\frac{4n(n-1)}{2}=2nn-n$

$d=5$ — — — — $n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{5nn-3n}{2}$

$d=6$ — — — — $n+\frac{6n(n-1)}{2}=3nn-2n$

$d=7$ — — — — $n+\frac{7n(n-1)}{2}=\frac{7nn-5n}{2}$

$d=8$ — — — — $n+\frac{8n(n-1)}{2}=4nn-3n$

$d=9$ — — — — $n+\frac{9n(n-1)}{2}=\frac{9nn-7n}{2}$

$d=10$ — — — $n+\frac{10n(n-1)}{2}=5nn-4n$

&c.

CHAPITRE V.

Des Nombres figurés ou polygones.

425.

LA sommation des progressions arithmétiques qui commencent par 1, & dont la différence est 1 ou 2 ou 3, ou quelqu'autre nombre entier que ce soit; cette sommation, dis-je, nous conduit à la théorie des *nombres polygones*, lesquels se forment quand on ajoute ensemble quelques termes de l'une ou de l'autre de ces progressions.

426.

Si on suppose la différence $=1$; puisque le premier terme est constamment $=1$, on aura la progression arithmétique, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, &c. Et si dans cette progression on prend la somme de un, de deux, de trois &c. termes, on verra se former cette suite de nombres;

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66 &c. car $1=1$, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$, &c.

Ces nombres on les nomme *triangulaires* ou *trigonaux*, parce qu'on peut toujours ranger en triangle autant de points qu'ils contiennent d'unités, comme on va voir:

1 3 6 10 15

21, 28, &c.

427.

On voit dans tous ces triangles combien chaque côté contient de points. Dans le premier triangle il n'y a qu'un point; dans le second il y en a deux; dans le troisieme

il y en a trois; dans le quatrieme il y en a quatre, &c. Ainsi les nombres triangulaires, ou le nombre des points (qu'on nomme simplement le *triangle*), se reglent sur le nombre des points que contient le côté, lequel nombre on nomme en un mot le *côté*. C'est-à-dire que le troisieme nombre triangulaire, par exemple, ou le troisieme triangle, est celui dont le côté a trois points; le quatrieme, celui dont le côté est quatre, & ainsi de suite; & voici comment nous représenterons cette propriété:

Côté

Triangle

Côté

Triangle

428.

Il ſe préſente donc ici la queſtion, comment, le côté étant donné, on doit déterminer le triangle? Et après ce que nous avons expoſé, nous y ſatisferons facilement.

Car ſoit le côté $= n$, le triangle ſera $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots n$. Or la ſomme de cette progreſſion eſt $= \frac{nn+n}{2}$; par conſéquent la valeur du triangle eſt $\frac{nn+n}{2}$ (*).

Et ſi $n = 1$, le triangle eſt $= 1$,
ſi $n = 2$, — — — — $= 3$,
ſi $n = 3$, — — — — $= 6$,
ſi $n = 4$, — — — — $= 10$,

& ainſi de ſuite. Lorſque $n = 100$, le triangle ſera $= 5050$.

429.

On nomme cette formule $\frac{nn+n}{2}$, la formule générale des nombres triangulaires;

(*) M. *de Joncourt* a publié à la Haye en 1762 une table des nombres trigonaux, qui répondent à tous les nombres naturels depuis 1 juſqu'à 20000. Ces tables peuvent être utiles pour faciliter un grand nombre d'opérations arithmétiques, comme l'Auteur le fait voir dans une Introduction fort étendue.

parce que par ſon ſecours on trouve le nombre triangulaire, ou le triangle; qui répond à un côté quelconque indiqué par n.

On peut transformer cette formule en celle-ci, $\frac{n(n+1)}{2}$; & cela ſert même à faciliter le calcul, parce que toujours un des deux nombres n, ou $n+1$, eſt un nombre pair, & par conſéquent diviſible par 2.

C'eſt ainſi que ſi $n = 12$, le triangle eſt $= \frac{12.13}{2} = 6.13 = 78$. Et que ſi $n = 15$, le triangle eſt $= \frac{15.16}{2} = 15.8 = 120$, &c.

430.

Qu'on ſuppoſe à préſent la différence $= 2$; on aura la progreſſion arithmétique ſuivante:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, &c.

dont les ſommes, en prenant ſucceſſivement un, deux, trois, quatre termes &c. forment cette ſérie:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 &c.

On nomme les termes de cette ſuite, les nombres *quadrangulaires*, ou plutôt

quarrés; puiſqu'en effet cette ſuite repréſente les quarrés des nombres naturels, comme nous les avons trouvés plus haut; & cette dénomination leur convient d'autant plus, qu'on peut toujours former un quarré du nombre de points qu'indiquent ces termes, ainſi qu'on va le voir:

1, 4, 9, 16, 25,

36, 49,

431.

On voit ici que le côté d'un tel quarré contient préciſément le nombre de points

qu'indique la racine quarrée. Le côté du quarré 25, par exemple, eſt de cinq points; celui du quarré 36 eſt de ſix points; & en général donc, ſi le côté eſt n, c'eſt-à-dire que le nombre des termes de la progreſſion, 1, 3, 5, 7, &c. qu'on aura pris, ſoit indiqué par n, on voit que le quarré, ou le nombre quadrangulaire, ſera égal à la ſomme de ces termes, ou $= nn$, ainſi que nous l'avons trouvée à l'article 422. Nous ne nous arrêterons pas davantage à ces nombres quarrés, en ayant traité au long plus haut.

432.

Faiſant maintenant la différence $= 3$, & prenant de la même maniere les ſommes, on obtiendra des nombres qu'on appelle *pentagones*, quoiqu'on ne puiſſe plus ſi bien les repréſenter par des points (*). Ces ſuites commencent ainſi:

(*) Ce n'eſt pas cependant qu'on ne puiſſe auſſi repréſenter par des points les polygones d'un nombre quel-

Indices, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.
Prog. arith. 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 &c.
Pentagone, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117 &c.
les indices indiquant le côté de chaque pentagone.

433.

Il s'enſuit de-là que ſi on fait le côté $=n$, le nombre pentagone ſera $=\frac{3nn-n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$. Soit, par exemple, $n=7$, le pentagone ſera $=70$. Si on demande le pentagone, dont le côté eſt 100, on fera $n=100$, & on aura 14950 pour le nombre cherché.

conque de côtés; mais la regle que j'ai remarqué qu'il faut ſuivre pour cet effet, & que je vais indiquer, me paroit avoir échappé à tous les Algébriſtes que j'ai conſultés.

On commence par tracer un petit polygone régulier qui ait le nombre de côtés qu'on demande; ce nombre reſte conſtant pour une même ſuite de nombres polygones, & il eſt égal à 2 *plus* la différence de la progreſſion arithmétique qui produit la ſuite; on choiſit enſuite un des angles de ce polygone pour tirer du point de concours autant de diagonales indéfinies qu'il eſt poſſible; on prolonge de même indéfiniment les deux côtés qui forment l'angle qu'on a adopté; après cela on prend ces deux côtés & les diagonales du premier polygone,

434.

Que ſi l'on ſuppoſe la différence $=4$, on parvient aux nombres *hexagones*, comme on le voit dans les progreſſions qui ſuivent:

reſpectivement autant de fois qu'on veut ſur les lignes indéfinies; on tire des points correſpondans où le compas s'eſt arrêté, des lignes paralleles aux côtés du premier polygone, & on les partage en autant de parties égales, ou par autant de points qu'en ont actuellement les diagonales & les deux côtés prolongés. Cette regle eſt générale depuis le triangle juſqu'au polygone d'un nombre infini de côtés. Les deux figures qui ſuivent ſuffiront pour en faciliter l'application.

La diviſion de ces figures en triangles fournit encore matiere à différentes conſidérations curieuſes & à des transformations aſſez jolies des formules générales, par leſquelles on voit dans ce chapitre comment s'expriment les nombres polygones; mais je ne crois pas devoir m'y arrêter.

Indices, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.
Prog. arith. 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33 &c.
Hexagone, 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153 &c.
les indices montrant encore le côté de chaque hexagone.

435.

Ainſi quand le côté eſt n, le nombre hexagone eſt $= 2nn - n = n(2n-1)$; & on obſervera au reſte que tous les nombres hexagones ſont auſſi triangulaires, puiſque en ne prenant de ces derniers que le premier, le troiſieme, le cinquieme &c. on a préciſément la ſuite des hexagones.

436.

On trouvera de la même maniere les nombres heptagones, octogones, ennéagones, &c. Nous nous contenterons de donner encore ici le tableau des formules générales de tous ces nombres, compris ſous le nom général de *nombres polygones*.

En ſuppoſant le côté $= n$, on a

le triangle $= \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$,

le quarré $= \frac{2nn+0n}{2} = nn$,

le V gone $= \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$,

le VI gone $= \frac{4nn-2n}{2} = 2nn-n = n(2n-1)$

le VII gone $= \frac{5nn-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$,

le VIII gone $= \frac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2)$

le IX gone $= \frac{7nn-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$,

le X gone $= \frac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3)$

le XI gone $= \frac{9nn-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$,

le XII gone $= \frac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4)$

le XX gone $= \frac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8)$

le XXV gone $= \frac{23nn-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$,

le m gone $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$ (*).

437.

Ainſi le côté étant n, on a en général le nombre m angulaire $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$; d'où l'on peut déduire tous les nombres poly-

(*) On remarquera ſans peine que cette table n'eſt que celle de l'article 424 pouſſée plus loin.

gones possibles dont le côté seroit n. Si on cherchoit, par exemple, les nombres biangulaires, on auroit $m=2$, & par conséquent le nombre cherché $=n$; c'est-à-dire que les nombres biangulaires sont les nombres naturels 1, 2, 3, &c.

Si on fait $m=3$, on a le nombre triangulaire $=\frac{nn+n}{2}$.

Si on fait $m=4$, on a le nombre quarré $=nn$, &c.

438.

Supposons, pour éclaircir cette regle par des exemples, qu'on cherche le nombre XXV gone, dont le côté est 36; on cherchera d'abord dans notre table le nombre XXV gone pour le côté n; on le trouvera $=\frac{23nn-21n}{2}$. Faisant ensuite $n=36$, on trouvera le nombre cherché $=14526$.

439.

Question. Quelqu'un a acheté une maison, & on lui demande combien il en a payé? Il répond que le nombre 365 gone de

de 12 est le nombre d'écus qu'il l'a achetée.

Afin de trouver ce nombre, on fera $m=365$ & $n=12$; & substituant ces valeurs dans la formule générale, on trouvera pour le prix de la maison 23970 écus (*).

(*) Le chapitre qu'on vient de lire, est intitulé *des nombres figurés* ou *polygones*. On peut avoir remarqué que ce n'est pas sans fondement que quelques Algébristes distinguent entre nombres *figurés* & nombres *polygones*. En effet les nombres qu'on nomme communément *figurés*, dérivent tous d'une seule progression arithmétique, & chaque suite de ces nombres se forme après cela en ajoutant ensemble les termes de la suite précédente. Chaque suite des nombres *polygones*, au contraire, provient d'une progression arithmétique différente; cela fait qu'on ne peut dire à la rigueur d'une seule suite de nombres figurés, qu'elle est en même temps une suite de nombres polygones. On s'en convaincra mieux en jetant les yeux sur les tables qui suivent.

TABLE DES NOMBRES FIGURÉS.

Nombres constans - - - - -	1.	1.	1.	1.	1.	1.	&c.
naturels - - - - -	1.	2.	3.	4.	5.	6.	&c.
triangulaires - - -	1.	3.	6.	10.	15.	21.	&c.
pyramidaux - - -	1.	4.	10.	20.	35.	56.	&c.
trianguli-pyramidaux	1.	5.	15.	35.	70.	126.	&c.

TABLE DES NOMBRES POLYGONES.

Diff. de la progr.	Nombres
1	triangulaires - - 1.3. 6.10.15. &c.
2	quarrés - - - 1.4. 9.16.25. &c.
3	pentagones - - 1.5.12.22.35. &c.
4	hexagones - - 1.6.15.28.45. &c.

Les puissances forment aussi des suites particulieres de nombres. Les deux premieres se retrouvent dans les nombres figurés, & la troisieme dans les nombres polygones ; c'est ce qu'on va voir, en substituant à a successivement les nombres 1, 2, 3 &c.

TABLE DES PUISSANCES.

a^0 - - - - - -	1. 1. 1. 1. 1. &c.
a^1 - - - - - -	1. 2. 3. 4. 5. &c.
a^2 - - - - - -	1. 4. 9. 16. 25. &c.
a^3 - - - - - -	1. 8.27. 64.125. &c.
a^4 - - - - - -	1.16.81.256.625. &c.

Les Algébristes du seizieme & du dix-septieme siecle se sont tous beaucoup occupés de ces différentes especes de nombres & de leurs rapports entr'elles ; ils y ont trouvé une variété singuliere de propriétés curieuses ; mais leur utilité n'étant cependant pas grande, on neglige aujourd'hui, avec raison, d'en parler beaucoup dans les cours de Mathématiques.

CHAPITRE VI.

Du Rapport Géométrique.

440.

LE *rapport géométrique* entre deux nombres contient la réponse à la question, *combien de fois* l'un de ces nombres est plus grand que l'autre? On le trouve en divisant l'un par l'autre ; le quotient indique la raison cherchée.

441.

On a donc trois choses à considérer ici ; 1°. le premier des deux nombres proposés, qu'on nomme l'*antécédent* ; 2°. l'autre nombre, qu'on appelle le *conséquent* ; 3°. *la raison* des deux nombres, ou le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent. Par exemple, si c'est le rapport des nombres 18 & 12 qu'il s'agit d'indiquer, 18 est l'antécédent, 12 est le conséquent,

& la raiſon ſera $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$; d'où l'on voit que l'antécédent contient le conſéquent une fois & demie.

442.

On a coutume d'indiquer le rapport géométrique par deux points, mis l'un au-deſſus de l'autre entre l'antécédent & le conſéquent.

Ainſi $a:b$ ſignifie le rapport géométrique de ces deux nombres, ou la raiſon de b à a. Nous avons déjà remarqué plus haut qu'on ſe ſert de ce ſigne pour indiquer la diviſion, & c'eſt auſſi pourquoi on l'emploie ici; parce qu'afin de connoître ce rapport, il faut qu'on diviſe a par b. La raiſon, indiquée par ce ſigne, ſe prononce en diſant ſimplement a eſt à b.

443.

On repréſente donc l'expreſſion d'un rapport par une fraction dont le numérateur eſt l'antécédent, & dont le dénominateur eſt le conſéquent. La clarté exige

qu'on réduiſe toujours cette fraction à ſes moindres termes, ce qu'on fait, comme nous l'avons montré plus haut, en diviſant le numérateur & le dénominateur par leur plus grand commun diviſeur. Ainſi la fraction $\frac{18}{12}$ ſe réduit à $\frac{3}{2}$, en diviſant les deux termes par 6.

444.

Les rapports ne different donc entr'eux qu'en tant que leurs raiſons ſont différentes; & il y a autant de différentes eſpeces de rapports géométriques qu'on peut imaginer de différentes raiſons.

La premiere eſpece eſt ſans contredit celle où la raiſon devient l'unité; ce cas arrive quand les deux nombres ſont égaux, comme dans $3:3$; $4:4$; $a:a$; la raiſon eſt ici 1, & à cauſe de cela on la nomme le rapport de l'égalité.

Viennent enſuite les eſpeces où la raiſon eſt un autre nombre entier; dans $4:2$ la raiſon eſt 2, & on la nomme raiſon *double*;

dans 12:4 la raiſon eſt 3, & on la nomme raiſon *triple*; dans 24:6 la raiſon eſt 4, & elle s'appelle raiſon *quadruple*, &c.

Après ces éſpeces-là viennent celles dont les raiſons s'expriment par des fractions, comme 12:9, où la raiſon eſt $\frac{4}{3}$ ou $1\frac{1}{3}$; 18:27, où la raiſon eſt $\frac{2}{3}$, &c. On peut même diſtinguer parmi celles-ci les raiſons où le conſéquent contient exactement deux fois, trois fois &c. l'antécédent: tels ſont les rapports 6:12, 5:15 &c. dont quelques-uns nomment les raiſons, raiſons *ſoûdoubles*, *ſoûtriples*, &c.

Nous ajouterons qu'on nomme raiſon *de nombre à nombre*, celle dont le quotient n'eſt pas un nombre inexprimable, l'antécédent & le quotient étant des nombres entiers, comme 11:7, 8:15 &c. & qu'on appelle raiſon *irrationnelle* ou *ſourde*, celle dont le quotient ne peut s'exprimer exactement ni par des nombres entiers, ni par des fractions, comme $\sqrt{5}$ à 8, 4 à $\sqrt{3}$.

445.

Soit à préſent a l'antécédent, b le conſéquent & d la raiſon, nous ſavons déjà que a & b étant donnés, on trouve $d=\frac{a}{b}$.

Que ſi le conſéquent b étoit donné avec la raiſon, on trouveroit l'antécédent $a=bd$, parce que bd diviſé par b fait d. Enfin ſi l'antécédent a eſt donné & la raiſon d, on trouvera le conſéquent $b=\frac{a}{d}$; car en diviſant l'antécédent a par ce conſéquent $\frac{a}{d}$, on trouve le quotient d, c'eſt-à-dire la raiſon.

446.

Tout rapport $a:b$ reſte conſtant, ſoit qu'on multiplie ou qu'on diviſe l'antécédent & le conſéquent par le même nombre, parce que la raiſon reſte la même. Soit d la raiſon de $a:b$, on a $d=\frac{a}{b}$; or la raiſon du rapport $na:nb$ eſt auſſi $\frac{a}{b}=d$, & celle du rapport $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ eſt pareillement $\frac{a}{b}=d$.

447.

Quand une raiſon a été réduite à ſes moindres termes, il eſt facile d'en reconnoître le rapport & de l'énoncer. Par exempl. quand la raiſon $\frac{a}{b}$ a été réduite à la fraction $\frac{p}{q}$, on dit $a:b = p:q$, $a:b::p:q$, ce qui ſe prononce, a eſt à b comme p eſt à q. Ainſi, la raiſon du rapport 6:3 étant $\frac{2}{1}$ ou 2, on dira $6:3 = 2:1$. On aura de même $18:12 = 3:2$, & $24:18 = 4:3$, & $30:45 = 2:3$ &c. Que ſi la raiſon ne peut s'abréger, le rapport ne deviendra pas plus clair ; on ne ſimplifie pas en diſant $9:7 = 9:7$.

448.

On peut, au contraire, transformer quelquefois en un rapport clair & ſimple celui de deux très-grands nombres, ſavoir, lorſque la raiſon ſe réduit à de très-petits termes. Par exemple, quand on peut dire $28844:14422 = 2:1$, ou $10566:7044 = 3:2$, ou $57600:25200 = 16:7$.

449.

Il eſt donc eſſentiel, pour exprimer un rapport quelconque de la maniere la plus claire qu'il ſoit poſſible, de chercher à réduire la raiſon aux plus petits nombres qu'il ſe puiſſe. Cela ſe fait facilement, en diviſant les deux termes du rapport par leur plus grand commun diviſeur. Par exemple, pour réduire le rapport $57600:25200$ à celui-ci, $16:7$, tout conſiſte dans la ſeule opération de diviſer les nombres 576 & 252 par 36, qui eſt leur plus grand commun diviſeur.

450.

On voit donc auſſi combien il importe qu'on ſache toujours trouver le plus grand commun diviſeur de deux nombres donnés ; mais c'eſt ce qui demande une méthode que nous détaillerons dans le chapitre ſuivant.

CHAPITRE VII.

Du plus grand commun Diviſeur de deux Nombres donnés.

451.

IL eſt des nombres qui n'ont d'autre commun diviſeur que l'unité, & quand le numérateur & le dénominateur d'une fraction ſont de cette nature, il n'eſt pas poſſible de la réduire à une forme plus commode.

On voit, par exemple, que les deux nombres 48 & 35 n'ont pas de commun diviſeur, quoique chacun ait ſes diviſeurs en particulier. C'eſt pourquoi on ne peut exprimer plus ſimplement le rapport 48:35, parce que la diviſion de deux nombres par 1 ne les rend pas plus petits.

452.

Mais lorſque les deux nombres ont un commun diviſeur, on le trouve, & même

le plus grand qu'ils aient, par la regle ſuivante :

Il faut diviſer le plus grand des deux nombres par le plus petit ; on diviſera enſuite par le réſidu le diviſeur précédent ; ce qui reſte dans cette ſeconde diviſion, ſervira après cela de diviſeur pour une troiſieme diviſion, dans laquelle le réſidu ou le diviſeur précédent ſera le dividende, & on continuera de la même maniere juſqu'à ce qu'on arrive à une diviſion ſans reſte ; le diviſeur de cette diviſion, & par conſéquent le dernier diviſeur, ſera le plus grand commun diviſeur des deux nombres donnés.

Voici cette opération pour les deux nombres 576 & 252 :

```
252 | 576 | 2
    | 504 |
      72 | 252 | 3
         | 216 |
           36 | 72 | 2
              | 72 |
                0.
```

Ainſi le plus grand commun diviſeur eſt ici 36.

453.

Il ſera bon d'éclaircir encore cette regle par quelques autres exemples.

Suppoſons qu'on cherche le plus grand commun diviſeur des nombres 504 & 312, on aura:

```
312 | 504 | 1
    | 312 |
      192 | 312 | 1
          | 192 |
            120 | 192 | 1
                | 120 |
                   72 | 120 | 1
                      |  72 |
                         48 | 72 | 1
                            | 48 |
                              24 | 48 | 2
                                 | 48 |
                                    0.
```

Ainſi 24 eſt le plus grand commun diviſeur, & par conſéquent le rapport 504:312 ſe réduit à la forme 21:13.

454.

Soit donné le rapport 625 : 529, & qu'on cherche le plus grand diviſeur commun entre ces deux nombres :

```
529 | 625 | 1
    | 529 |
       96 | 529 | 5
          | 480 |
             49 | 5  | 1
                | 49 |
                  47 | 49 | 1
                     | 47 |
                        2 | 47 | 23
                          | 46 |
                            1 | 2 | 2
                              | 2 |
                                0.
```

Donc 1 eſt ici le plus grand commun diviſeur, & par conſéquent on ne peut exprimer la raiſon 625 : 529 par des nombres plus petits, & la réduire à de moindres termes.

455.

Il ſera néceſſaire à préſent de donner auſſi la démonſtration de cette regle. Suppoſons pour cela que a ſoit le plus grand & b le plus petit des nombres donnés, & que d ſoit un de leurs communs diviſeurs, on comprendra d'abord que a & b étant diviſibles par d, on pourra auſſi diviſer par d les quantités $a-b$, $a-2b$, $a-3b$, & en général $a-nb$.

456.

Le réciproque n'eſt pas moins vrai ; c'eſt-à-dire que ſi les nombres b & $a-nb$ ſont diviſibles par d, le nombre a ſera auſſi diviſible par d. Car nb pouvant être diviſés par d, on ne pourroit diviſer $a-nb$ par d, ſi a n'étoit pas diviſible de même par d.

457.

Nous remarquerons de plus que ſi d eſt le *plus grand* commun diviſeur des deux nombres b & $a-nb$, il ſera auſſi le plus grand commun diviſeur des deux nombres a & b. Car ſi, pour ces nombres a & b, un diviſeur commun plus grand que d pouvoit avoir lieu, ce nombre ſeroit auſſi un diviſeur commun de b & $a-nb$, & par conſéquent d ne ſeroit pas le plus grand diviſeur de ces deux nombres. Or nous venons de ſuppoſer d le plus grand diviſeur commun à b & à $a-nb$; donc il faut que d ſoit auſſi le plus grand commun diviſeur de a & de b.

458.

Ces trois choſes étant poſées, diviſons, ſuivant la regle, le plus grand nombre a par le plus petit b ; & ſuppoſons le quotient $=n$, nous aurons le réſidu $a-nb$, qui ne peut qu'être plus petit que b. Or ce reſte $a-nb$ ayant le même plus grand commun diviſeur avec b que les nombres donnés a & b, on n'a qu'à recommencer la diviſion, en diviſant le diviſeur précédent b par ce réſidu $a-nb$; le nouveau réſidu qu'on ob-

tiendra, aura encore, avec le diviſeur précédent, le même plus grand commun diviſeur, & ainſi de ſuite.

459.

On continuera donc de la même maniere, juſqu'à ce qu'on parvienne à une diviſion ſans reſte, c'eſt-à-dire où le réſidu ſoit zéro. Soit p ce dernier diviſeur, contenu exactement un certain nombre de fois dans ſon dividende; ce dividende ſera donc diviſible par p, & aura la forme mp; ainſi ces nombres p & mp ſont tous les deux diviſibles par p, & il eſt sûr qu'ils n'ont pas de plus grand commun diviſeur, parce qu'aucun nombre ne peut être diviſé réellement par un nombre plus grand que lui-même. Par conſéquent c'eſt auſſi ce dernier diviſeur qui eſt le plus grand commun diviſeur des nombres propoſés a & b, & voilà la démonſtration de la regle preſcrite.

460.

Mettons ici encore un exemple de la même regle, en cherchant le plus grand commun

commun diviſeur des nombres 1728 & 2304. Voici l'opération:

```
1728 | 2304 | 1
     | 1728 |
      576 | 1728 | 3
          | 1728 |
              0.
```

Il s'enſuit de-là que 576 eſt le plus grand commun diviſeur, & que le rapport 1728 : 2304 ſe réduit à celui-ci, 3:4; c'eſt-à-dire que 1728 eſt à 2304 tout comme 3 eſt à 4.

CHAPITRE VIII.

Des Proportions Géométriques.

461.

DEUX rapports géométriques ſont égaux lorſque leurs raiſons ſont égales. Cette égalité de deux rapports ſe nomme une *proportion géométrique*; & on écrit, par exemple, $a:b = c:d$ ou $a:b::c:d$, pour indiquer que

le rapport $a:b$ eſt égal au rapport $c:d$; mais on exprime plus ſimplement la ſignification de cette formule, en diſant *a* eſt à *b* comme *c* à *d*. Une telle proportion eſt celle-ci, $8:4=12:6$; car la raiſon du rapport $8:4$ eſt $\frac{2}{1}$, & c'eſt auſſi la raiſon du rapport $12:6$.

462.

Ainſi $a:b=c:d$ étant une proportion géométrique, il faut qu'une même raiſon ait lieu des deux côtés, & que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; & réciproquement ſi les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ſont égales, on a $a:b=c:d$.

463.

Une proportion géométrique conſiſte donc en quatre termes, tels que le premier, diviſé par le ſecond, donne le même quotient que le troiſieme, diviſé par le quatrieme. On déduit de-là une propriété importante, commune à toutes les proportions géométriques, & qui eſt que le produit

du premier & du quatrieme terme eſt toujours égal au produit du ſecond & du troiſieme; ou plus ſimplement, que le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

464.

Prenons, pour démontrer cette propriété, la proportion géométrique $a:b=c:d$, de ſorte que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Si on multiplie l'une & l'autre de ces deux fractions par *b*, on obtient $a=\frac{bc}{d}$, & multipliant de plus par *d* des deux côtés, on a $ad=bc$. Or *ad* eſt le produit des termes extrêmes, *bc* eſt celui des moyens, & ces deux produits ſe trouvent égaux.

465.

Réciproquement ſi les quatre nombres *a*, *b*, *c*, *d*, ſont tels que le produit des deux extrêmes *a* & *d* eſt égal au produit des deux moyens *b* & *c*, on eſt certain qu'ils forment une proportion géométrique. Car, puiſque $ad=bc$, on n'a qu'à diviſer de part

& d'autre par bd, on aura $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$, ou $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, & par conſéquent $a:b=c:d$.

466.

Les quatre termes d'une proportion géométrique, comme $a:b=c:d$, peuvent ſe tranſpoſer de différentes manieres, ſans que la proportion ceſſe de ſubſiſter. Car le principal étant toujours que le produit des extrêmes ſoit égal au produit des moyens, ou $ad=bc$, on peut dire: 1°. $b:a=d:c$; 2°. $a:c=b:d$; 3°. $d:b=c:a$; 4°. $d:c=b:a$.

467.

Outre ces quatre proportions géométriques, on peut en déduire encore d'autres de la même proportion, $a:b=c:d$. On peut dire: $a+b:a$, ou le premier terme plus le ſecond, eſt au premier, comme le troiſieme + le quatrieme eſt au troiſieme, c'eſt-à-dire, $a+b:a=c+d:c$.

On peut enſuite dire: le premier — le ſecond eſt au premier comme le troiſieme

— le quatrieme eſt au troiſieme, ou bien $a-b:a=c-d:c$.

Car ſi l'on prend le produit des extrêmes & des moyens, on a $ac-bc=ac-ad$, ce qui revient évidemment à l'égalité $ad=bc$.

Enfin il eſt facile auſſi de démontrer que $a+b:b=c+d:d$; & que $a-b:b=c-d:d$.

468.

Toutes les proportions que nous avons vu dériver de $a:b=c:d$, peuvent ſe repréſenter de la maniere générale qui ſuit:

$$ma+nb:pa+qb=mc+nd:pc+qd.$$

Car le produit des termes extrêmes eſt $mpac+npbc+mqad+nqbd$, ou, puiſque $ad=bc$, ce produit devient $mpac+npbc+mqbc+nqbd$. De plus le produit des termes moyens eſt $mpac+mqbc+npad+nqbd$, ou, à cauſe de $ad=bc$, il eſt $mpac+mqbc+npbc+nqbd$, ainſi ces deux produits ſont égaux.

469.

Il eſt donc clair qu'une proportion géométrique étant donnée, par exemple, 6:3

$=10:5$, on peut en déduire une infinité d'autres de celle-ci. Nous n'en mettrons ici que quelques-unes.

$3:6=5:10$; $6:10=3:5$; $9:6=15:10$;
$3:3=5:5$; $9:15=3:5$; $9:3=15:5$.

470.

Puisque dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, on peut, les trois premiers termes étant connus, trouver par leur moyen le quatrieme. Soient les trois premiers termes $24:15=40$ à.... comme le produit des moyens est ici 600, il faut que le quatrieme terme multiplié par le premier, c'est-à-dire par 24, fasse pareillement 600; par conséquent en divisant 600 par 24, le quotient 25 sera le quatrieme terme cherché, & la proportion entiere sera $24:15=40:25$. En général donc, si les trois premiers termes sont $a:b=c:$.... on mettra d pour la quatrieme lettre inconnue; & puisqu'il faut que $ad=bc$, on divisera de part

& d'autre par a, & on aura $d=\frac{bc}{a}$. Ainsi le quatrieme terme est $=\frac{bc}{a}$, & on le trouve en multipliant le second terme par le troisieme, & en divisant ce produit par le premier terme.

471.

Voilà le fondement de cette *regle de trois* si célebre dans l'arithmétique; car que cherche-t-on dans cette regle? On suppose trois nombres donnés, & on en cherche un quatrieme qui soit avec ceux-là en proportion géométrique; de façon que le premier soit au second comme le troisieme est au quatrieme.

472.

Quelques circonstances particulieres se présentent à remarquer ici.

Dabord, si dans deux proportions les premiers & les troisiemes termes sont les mêmes, comme dans $a:b=c:d$ & $a:f=c:g$, je dis que les deux seconds & les deux quatriemes termes seront aussi en proportion

géométrique, & que $b:d=f:g$. Car la premiere proportion se transformant en celle-ci, $a:c=b:d$, & la seconde en celle-ci, $a:c=f:g$, il s'ensuit que les raisons $b:d$ & $f:g$ sont égales, puisque chacune d'elles est égale à la raison $a:c$. Par exemple, si $5:100=2:40$, & $5:15=2:6$, il faut que $100:40=15:6$.

473.

Mais si deux proportions sont telles que les termes moyens sont les mêmes dans l'une & dans l'autre, je dis que les premiers termes seront en raison inverse avec les quatriemes. C'est-à-dire, si $a:b=c:d$, & $f:b=c:g$, il s'ensuit que $a:f=g:d$. Soient, par exemple, les proportions $24:8=9:3$, & $6:8=9:12$, on aura $24:6=12:3$. La raison en est évidente: la premiere proportion donne $ad=bc$; la seconde donne $fg=bc$; donc $ad=fg$, & $a:f=g:d$, ou $a:g=f:d$.

474.

Deux proportions étant données, on peut toujours en faire une nouvelle, en multipliant séparément le premier terme de l'une par le premier terme de l'autre, le second par le second, & ainsi des autres termes. C'est ainsi que les proportions $a:b=c:d$ & $e:f=g:h$ fourniront celle-ci, $ae:bf=cg:dh$. Car la premiere donnant $ad=bc$, & la seconde donnant $eh=fg$, on aura aussi $adeh=bcfg$. Or $adeh$ est le produit des extrêmes, & $bcfg$ est le produit des moyens dans la nouvelle proportion; ainsi ces deux produits étant égaux, la proportion est vraie.

475.

Soient, par exemple, les deux proportions, $6:4=15:10$ & $9:12=15:20$, leur combinaison donnera la proportion, $6.9:4.12=15.15:10.20$,

ou $54:48=225:200$,

ou $9:8=9:8$.

476.

Nous observerons enfin que si deux produits sont égaux, comme $ad=bc$, on peut

réciproquement convertir cette égalité en une proportion géométrique.

On a toujours l'un des facteurs du premier produit à un des facteurs du second produit, comme l'autre facteur du second produit à l'autre facteur du second produit; c'est-à-dire, dans notre cas $a:c = b:d$, ou $a:b = c:d$. Soit $3.8 = 4.6$, on en formera cette proportion, $8:4 = 6:3$, ou celle-ci, $3:4 = 6:8$. De même si $3.5 = 1.15$, on aura $3:15 = 1:5$, ou $5:1 = 15:3$, ou $3:1 = 15:5$.

CHAPITRE IX.

Remarques sur les Proportions & sur leur usage.

477.

CETTE théorie est tellement nécessaire dans la vie commune, que personne presque ne peut s'en passer. Il y a toujours proportion entre les prix & les marchandises;

& quand il est question de différentes especes de monnoie, tout se réduit à déterminer les rapports qui sont entr'elles. Les exemples que ces réflexions nous fournissent, seront très-propres à éclaircir les principes des proportions, & à en faire voir l'utilité dans l'application.

478.

On voudroit savoir, par exemple, le rapport entre deux especes de monnoie: supposons un louis d'or vieux & un ducat; il faudra voir d'abord combien ces especes valent, étant comparées à une même espece. Ainsi un louis vieux valant à Berlin 5 rixdales & 8 gros, & un ducat valant 3 rixdales, si on réduit ces deux valeurs à une même espece; soit à des rixdales, ce qui donne la proportion 1 L. : 1 D. : $= 5\frac{1}{3}$ R. : 3 R. ou $= 16:9$; soit à des gros, dans lequel cas on auroit 1 L. : 1 D. $= 128:72 = 16:9$. On voit que ces proportions donnent le rapport juste du louis vieux au ducat;

car l'égalité des produits des extrêmes & des moyens donne dans l'une & dans l'autre 9 louis = 16 ducats ; & au moyen de cette comparaiſon on pourra changer en ducats une ſomme quelconque de louis d'or vieux, & réciproquement. Suppoſez qu'on demande combien 1000 louis vieux font en ducats, vous ferez cette regle de trois : 9 louis font 16 ducats ; que font 1000 louis ? & vous répondrez, $1777\frac{7}{9}$ ducats.

Que ſi l'on demandoit, au contraire, combien 1000 ducats font de louis d'or vieux, il faudroit faire cette regle de trois : 16 ducats font 9 louis ; que font 1000 ducats ? *réponſe*, $562\frac{1}{2}$ louis d'or vieux.

479.

Ici (à Saint-Pétersbourg) la valeur du ducat varie & dépend du cours du change. C'eſt ce cours qui détermine la valeur du rouble en ſtuvers ou ſous de Hollande, deſquels 105 font un ducat.

Ainſi quand le change eſt à 45 ſtuvers, on a cette proportion, 1 rouble : 1 ducat = 45 : 105 = 3 : 7 ; & de-là l'égalité : 7 roubles = 3 ducats.

On trouvera par-là combien un ducat fait en roubles ; car 3 ducats : 7 roubles = 1 ducat : .... *réponſe*, $2\frac{1}{3}$ roubles.

Si le change étoit à 50 ſtuvers, on auroit cette proportion, 1 rouble : 1 ducat = 50 : 105 = 10 : 21, ce qui donneroit 21 roubles = 10 ducats ; & on auroit 1 ducat = $2\frac{1}{\text{[illegible]}}$ roubles. Enfin, quand le change eſt à 44 ſtuvers, on a 1 rouble : 1 ducat : = 44 : 105, & par conſéquent 1 ducat = $2\frac{17}{44}$ roubles = 2 roubles $38\frac{7}{14}$ copeckes.

480.

Il s'enſuit de-là qu'on peut auſſi comparer enſemble plus de deux eſpeces de monnoie, ce qu'on a très-fréquemment occaſion de faire dans les lettres de change. Suppoſons, pour en donner un exemple, que quelqu'un d'ici ait 1000 roubles à faire

payer à Berlin, & qu'il veuille ſavoir combien cette ſomme fait en ducats à Berlin.

Le change eſt ici à $47\frac{1}{2}$, c'eſt-à-d. qu'un rouble fait $47\frac{1}{2}$ ſtuvers. En Hollande, 20 ſtuvers font un florin; $2\frac{1}{2}$ florins de Hollande font une rixdale de Hollande. De plus le change de la Hollande avec Berlin eſt à 142, c'eſt-à dire que pour 100 rixdales hollandoiſes on paye à Berlin 142 rixdales. Enfin le ducat vaut à Berlin 3 rixdales.

481.

Pour réſoudre maintenant la queſtion propoſée, allons pas à pas. En commençant donc par les ſtuvers, puiſque 1 rouble $= 47\frac{1}{2}$ ſtuvers, ou 2 roubles $=$ 95 ſtuvers, nous ferons 2 roubles : 95 ſtuvers $=$ 1000... *réponſe*, 47500 ſtuvers; & ſi nous allons plus loin & que nous diſions, 20 ſtuvers : 1 florin $=$ 47500 ſtuvers :.... nous aurons 2375 florins.

De plus, $2\frac{1}{2}$ florins $=$ 1 rixdale hollandoiſe, ou 5 florins $=$ 2 rixdales hollandoiſes; on fera donc 5 florins : 2 rixdales hollandoiſes $=$ 2375 florins :.... *réponſe*, 950 rixdales hollandoiſes.

Prenant enſuite les écus de Berlin ſuivant le change à 142, nous aurons 100 rixdales hollandoiſes : 142 rixdales $=$ 950 : au quatrieme terme, 1349 rixdales de Berlin. Paſſons enfin aux ducats, & diſons 3 rixdales : 1 ducat $=$ 1349 rixdales à..... *rép.* $449\frac{2}{3}$ ducats.

482.

Suppoſons, pour rendre ces calculs encore plus complets, que le Banquier de Berlin faſſe difficulté, ſous quelque prétexte que ce ſoit, de payer cette ſomme, & qu'il ne veuille acquitter la lettre de change qu'à raiſon de cinq pour cent de rabais, c'eſt-à-dire en ne payant que 100 au lieu de 105, il faudra encore faire cette regle de trois: $105 : 100 = 449\frac{2}{3}$ à un quatrieme terme, qui eſt $428\frac{16}{63}$ ducats.

483.

Nous venons de voir qu'on avoit besoin de six opérations en se servant de la regle de trois ; or on a trouvé moyen d'abréger extrêmement ces calculs par la regle qu'on nomme *regle de réduction.* Pour expliquer cette regle, nous considérerons d'abord les deux antécédens de chacune des six opérations précédentes:

I.)	2 roubles	: 95	stuvers.
II.)	20 stuvers	: 1	flor. holl.
III.)	5 flor. holl.	: 2	rixd. holl.
IV.)	100 rixd. hol.	: 142	rixd.
V.)	3 rixdales	: 1	ducat.
VI.)	105 ducats	: 100	ducats.

Si nous repassons à présent sur les calculs ci-dessus, nous remarquerons que nous avons toujours multiplié la somme proposée par les seconds termes, & que nous avons divisé les produits par les premiers termes ; il est donc clair qu'on parviendra au même résultat, en multipliant la somme proposée

proposée toute d'une fois, par le produit de tous les seconds termes, & en divisant par le produit de tous les premiers termes. Ou, ce qui revient au même, qu'on n'aura qu'à faire la regle de trois suivante: comme le produit de tous les premiers termes est au produit de tous les seconds termes, ainsi le nombre de roubles donné est au nombre de ducats payables à Berlin.

484.

Ce calcul s'abrege encore davantage, quand parmi les premiers termes il s'en trouve qui ont des diviseurs communs avec quelques-uns des seconds termes; car dans ce cas on efface ces termes, & on met à la place les quotients provenus de la division par ce diviseur commun. L'exemple précédent prendra de cette maniere la forme qu'on va voir:

Roubles 2. 1995 ftuv. 1000 r^bles.
20. 1 flor. holland.
5. 2 rixd. holland.
100. 142 rixd.
3. 1 duc.
105.21. 5 200 duc.

6300 : 2698 = 1000 à....

7)26980.

9)3854(2.

428(2. *Rép.* $428\frac{16}{63}$ ducats.

485.

L'ordre qu'il faut fuivre en fe fervant de la regle de réduction eft celui-ci : on commence par l'efpece de monnoie dont il eft queftion, & on la compare avec une autre qui doit commencer le rapport fuivant, dans lequel on compare cette feconde efpece avec une troifieme, & ainfi de fuite ; de façon que chaque rapport commence par l'efpece par laquelle le rapport précédent finiffoit ; on continue de même jufqu'à ce

qu'on arrive à l'efpece fur laquelle on demande la réponfe, & à la fin on tient compte encore des faux frais.

486.

Donnons encore d'autres exemples, afin de faciliter la pratique de ces opérations.

Si les ducats gagnent à Hambourg 1 pour cent fur deux rixdales de banque, c'eft-à-dire que 50 ducats valent, non pas 100, mais 101 rixdales de banque, & que le change entre Hambourg & Konigsberg foit 119 gros de Pologne, c'eft à-dire que 1 rixdale *banco* faffe 119 gros polonois, combien feront 1000 ducats en florins polonois? 30 gros polonois font 1 florin polon.

Ducat 1 : 2 rixd. B°. 1000 duc.
100 50 : 101 rixd. B°.
1 : 119 gr. pol.
30 : 1 flor. pol.

1500 : 12019 = 1000 duc. :....

3)120190.

5)40063(1.

8012(3. *Rép.* $8012\frac{2}{3}$ fl. p.

487.

On peut auſſi abréger encore un peu davantage, en écrivant le nombre qui fait le troiſieme terme au-deſſus du ſecond rang; car alors le produit du ſecond rang, diviſé par le produit du premier rang, donnera la réponſe déſirée.

Queſtion. On fait venir à Leipſig des ducats d'Amſterdam, ayant cours dans cette derniere ville à raiſon de 5 flor. 4 ſtuvers courans, c'eſt-à-dire que 1 ducat vaut 104 ſtuvers, & que 5 ducats valent 26 florins hollandois. Si donc l'*agio di B°.* eſt à Amſterdam de 5 pour cent, c'eſt-à-dire que 105 courans faſſent 100 de banque, & que le change de Leipſig à Amſterdam, en argent de banque, ſoit $133\frac{1}{4}$ pour cent, c'eſt-à-dire que pour 100 rixdales on paye à Leipſig $133\frac{1}{4}$ rixdales; enfin 2 rixdales de Hollande faiſant 5 florins de Hollande, on demande combien, ſuivant ces changes, il faudra payer de rixdales à Leipſig pour 1000 ducats?

			$\not5.\not1\not0\not0\not0$	ducats.
Ducats	$\not5$	:	26	fl. holl. cour.
	$\not2\not0\not5.21$	:	$4.\not2\not0.\not1\not0\not0$	flor. holl. B°.
	$\not5$	:	$\not2$	rixd. B°.
	$\not4\not0\not0.\not2$	:	533	rixd. à Leipſ.
	21	:	3)55432(1.	
			7)18477(4.	
			2639.	

Rép. $2639\frac{15}{21}$ rixdales, ou 2639 rixdales & 15 bons gros.

CHAPITRE X.

Des Rapports compoſés.

488.

ON obtient des *rapports compoſés*, en multipliant par ordre les termes de deux ou de pluſieurs raiſons, les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les

conféquens; & on dit alors que le rapport entre ces deux produits eft *compofé* des rapports donnés.

C'eft ainfi que les rapports $a:b$, $c:d$, $e:f$ donnent le rapport compofé $ace:bdf$ (*).

489.

Une raifon reftant toujours la même, quand, pour l'abréger, on divife fes deux termes par un même nombre, on peut faciliter beaucoup la compofition ci-deffus en comparant les antécédens & les conféquens dans le deffein de faire de telles réductions, ainfi que nous l'avons fait dans le chapitre précédent.

Voici, par exemple, comment on trouve le rapport compofé des rapports donnés qui fuivent.

(*) Chacune de ces trois raifons eft dite être une des *racines* de la raifon compofée.

Rapports donnés.

12:25, 28:33, & 55:56.

~~12~~,~~4~~,2 : 5.~~25~~.
~~28~~ : ~~11~~ ~~33~~.
~~55~~ ~~5~~ : ~~2~~ ~~56~~.

2 : 5.

Donc 2:5 eft la raifon compofée qu'on cherchoit.

490.

Le même procédé a lieu, quand il s'agit d'opérer en général fur des lettres; & le cas le plus remarquable eft celui où chaque antécédent eft égal au conféquent de la raifon précédente. Si les raifons données font

$a : b$
$b : c$
$c : d$
$d : e$
$e : a$;

la raifon compofée eft 1:1.

491.

On verra l'utilité de ces principes, en remarquant que deux champs quarrés ont entr'eux un tel rapport, composé des rapports des longueurs & des largeurs.

Soient, par exemple, les deux champs *A* & *B*; que *A* ait 500 pieds de longueur sur 60 pieds de largeur, & que la longueur de *B* soit de 360 pieds, & sa largeur de 100 pieds; le rapport des longueurs sera 500:360, & celui des largeurs 60:100. Ainsi l'on a

500,5	:	6,360.
60	:	100.
5	:	6.

Donc le champ *A* est au champ *B* comme 5 à 6.

492.

Autre exemple. Soit le champ *A* long de 720 pieds, large de 88 pieds; le champ *B* long de 660 pieds, & large de 90 pieds,

on composera les rapports de la maniere qui suit:

Rapport des long.	720,8	:	15,60,660.
Rapport des larg.	88 8 2	:	90.
Rap. des champs *A* & *B*	16	:	15.

493.

De plus, s'il s'agit de comparer deux chambres relativement à l'espace ou au contenu, on observera que ce rapport est composé de trois rapports; savoir, de celui des longueurs, de celui des largeurs & de celui des hauteurs. Soit, par exemple, la chambre *A*, dont la longueur =36 pieds, la largeur =16 pieds, & la hauteur =14 pieds; & la chambre *B*, dont la longueur =42 pieds, la largeur =24 pieds, & la hauteur =10 pieds; on aura ces trois rapports:

pour la longueur	36,6	:	42,7.
pour la largeur	16,4,2	:	24,4.
pour la hauteur	14,2	:	10,5.
	4	:	5.

Ainſi le contenu de la chambre *A* eſt au contenu de la chambre *B* comme 4 à 5.

494.

Lorſque les raiſons qu'on compoſe de cette maniere ſont égales, il en réſulte des raiſons multiples. Savoir, deux raiſons égales donnent une *raiſon doublée* ou *quarrée*; trois raiſons égales produiſent la *raiſon triplée* ou *cubique*, & ainſi de ſuite. Par exemp. les raiſons $a:b$ & $a:b$ donnent la raiſon compoſée $aa:bb$; c'eſt pourquoi l'on dit que les quarrés ſont en raiſon doublée de leurs racines. Et le rapport $a:b$ multiplié trois fois, donnant le rapport $a^3 : b^3$, on dit que les cubes ſont en raiſon triplée de leurs racines.

495.

On enſeigne dans la Géométrie que deux eſpaces circulaires ſont en raiſon doublée de leurs diametres; cela ſignifie qu'ils ſont l'un à l'autre dans le rapport des quarrés de leurs diametres.

Soit *A* un tel eſpace dont le diametre $=45$ pieds, & *B* un autre eſpace circulaire dont le diametre $=30$ pieds; le premier eſpace ſera au ſecond comme 45.45 à 30.30, ou, en compoſant ces deux raiſons égales,

$$\not{4}\not{5},\not{9},3 : \not{3}\not{0},\not{6},2.$$
$$\underline{\not{4}\not{5},\not{9},3 : \not{3}\not{0},\not{6},2.}$$
$$9 : 4.$$

Donc ces deux aires ſont entr'elles comme 9 à 4.

496.

On démontre auſſi que les ſolidités des ſpheres ſont en raiſon cubique des diametres de ces globes. Ainſi le diametre d'un globe *A* étant 1 pied, & le diametre d'un globe *B* étant 2 pieds, la ſolidité de *A* ſera à celle de *B* comme $1^3 : 2^3$, ou comme 1 à 8.

Si donc ces ſpheres ſont d'une même matiere, la ſphere *B* peſera 8 fois autant que la ſphere *A*.

497.

On voit qu'on peut trouver par-là le poids des boulets de canon, leurs diametres & le poids d'un ſeul étant donnés. Soit, par exemple, le boulet *A* dont le diametre $=2$ pouces, & le poids $=5$ livres, & qu'on demande le poids d'un autre boulet dont le diametre ſeroit de 8 pouces, on aura cette proportion, $2^3:8^3=5$; au quatrieme terme, 320 liv. qui indique le poids du boulet *B*. On auroit pour un autre boulet *C*, dont le diametre ſeroit $=15$ pouces,

$$2^3:15^3=5:\ldots.$$ *Rép.* $2109\frac{3}{8}$ liv.

498.

Quand on cherche le rapport de deux fractions, comme $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$, on peut toujours l'exprimer en nombres entiers; car on n'a qu'à multiplier les deux fractions par bd, on obtiendra le rapport $ad:bc$ qui eſt égal à l'autre, & d'où réſulte la proportion $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=ad:bc$. Si donc ad & bc ont des diviſeurs

communs, le rapport pourra ſe réduire à de moindres termes. C'eſt ainſi que $\frac{15}{24}:\frac{25}{36}=15.36:24.25=9:10$.

499.

On voudroit ſavoir encore quel eſt le rapport des fractions $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{b}$; il eſt clair qu'on aura $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a$; ce qu'on exprime en diſant que deux fractions qui ont l'unité pour numérateur, ſont en raiſon *réciproque* ou *inverſe* de leurs dénominateurs. On dit la même choſe de deux fractions qui ont un même numérateur quelconque; car $\frac{c}{a}:\frac{c}{b}=b:a$. Maïs ſi deux fractions ont leurs dénominateurs égaux, comme $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}$, elles ſont en *raiſon directe* des numérateurs, ſavoir, comme $a:b$. Ainſi $\frac{3}{8}:\frac{3}{16}=\frac{6}{16}:\frac{3}{16}=6:3=2:1$, & $\frac{10}{7}:\frac{15}{7}=10:15$, ou $=2:3$.

500.

On a remarqué dans la chute libre des corps, qu'un corps tombe de 15 pieds dans

une seconde ; que dans deux secondes de temps il tombe de la hauteur de 60 pieds, & que dans trois secondes il tombe de 135 pieds ; on en a conclu que les hauteurs sont entr'elles comme les quarrés des temps, & que réciproquement les temps sont en raison sous-doublée des temps, ou comme les racines quarrées des temps.

Si donc on demande combien de temps il faut à une pierre pour tomber de la hauteur de 2160 pieds ; on aura 15:2160=1 au quarré du temps cherché. Ainsi le quarré du temps cherché est 144, & par conséquent le temps qu'on demande est 12 secondes.

501.

On demande combien de chemin, ou quelle hauteur, une pierre pourra parcourir en tombant pendant une heure de tems, c'est-à-dire en 3600 secondes? On dira donc, comme les quarrés des temps, c'est-à-dire $1^2:3600^2$; ainsi la hauteur donnée =15 pieds, à la hauteur cherchée.

1 : 12960000=15 :..... 194400000 haut^r. cherchée.

```
  15
---------
 64800000
1296
---------
194400000.
```

Si nous comptons maintenant 18000 pieds pour une lieue, nous trouverons cette hauteur de 10800, & par conséquent près de quatre fois plus grande que le diametre de la Terre.

502.

Il en est de même à l'égard du prix des pierres précieuses, lesquelles ne se vendent pas dans la proportion des poids ; tout le monde sait que ces prix suivent un plus grand rapport. La regle pour les diamans est, que le prix est en raison quarrée du poids, c'est-à-dire que le rapport des prix est égal à la raison doublée des poids. On exprime le poids des diamans en carats, & un carat vaut 4 grains ; si donc un dia-

mant d'un carat vaut 10 liv. un diamant de 100 carats vaudra autant de fois 10 livres, que le quarré de 100 est plus grand que 1; ainsi on aura, suivant la regle de trois,

$1^2 : \ 100^2 = 10$ liv. :
ou $1 : 10000 = 10 :$ ..... *Rép.* 100000 liv.

Il y a un diamant en Portugal qui pese 1680 carats; son prix se trouvera donc en faisant

$1^2 : \ 1680^2 = 10$ liv. : ..... ou
$1 : 2822400 = 10 : 28224000$ liv.

503.

Les postes fournissent assez d'exemples de rapports composés, parce qu'elles se payent en raison composée du nombre des chevaux & de celui des lieues ou des postes. Par exemple, un cheval se payant 20 sous par poste, qu'on veuille savoir ce qu'on aura à payer pour 28 chevaux & pour $4\frac{1}{2}$ postes?

postes? On écrira d'abord le rapport des
chevaux, — — — — — 1 : 28,
sous ce rapport on mettra celui
des postes, — — — — 2 : 9,
& composant les deux rapports,
on aura — — — — — 2 : 252,
ou $1 : 126 = 1$ liv. à 126 fr. ou 42 écus.

Autre question. Si on paye un ducat pour huit chevaux par trois milles d'Allemagne, combien coûteront trente chevaux pour quatre milles? On fera le calcul suivant:

8̸ 2̸ : 3̸0̸, 1̸5̸, 5.
3̸ : 4̸.

1 : 5 = 1 duc. : au 4^e. terme, qui sera 5 duc.

504.

La même composition des rapports se présente, quand il est question de payer des Ouvriers, puisque ces payemens suivent ordinairement la raison composée du nombre des Ouvriers & de celui des jours qu'on les a employés.

Si on donne, par exemple, 25 ſous par jour à un Maçon, & qu'on demande ce qu'il faudra payer à vingt-quatre Maçons qui auront travaillé pendant 50 jours? On fera ce calcul:

1 : 24
1 : 50
1 : 1200 = 25 :..... 1500 francs
25
20)30000(1500.

Comme dans ces ſortes d'exemples on a cinq données, on nomme dans les livres d'Arithmétique regle de cinq, celle qui ſert à réſoudre ces queſtions.

CHAPITRE XI.

Des Progreſſions géométriques.

505.

UNE ſuite de nombres qui deviennent toujours un même nombre de fois plus grands ou plus petits, ſe nomme une *progreſſion géométrique*, parce que chaque terme eſt conſtamment au ſuivant dans le même rapport géométrique. Et le nombre qui indique combien de fois chaque terme eſt plus grand que le précédent, s'appelle l'*expoſant*. Ainſi, quand le premier terme eſt 1 & l'expoſant = 2, la progreſſion géométrique devient:

Termes	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9	&c.
Progr.	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256	&c.

les nombres 1, 2, 3 &c. marquant toujours les quantiemes termes de la progreſſion.

506.

Si on suppose, en général, le premier terme $=a$ & l'exposant $=b$, on a la progression géométrique suivante:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots n.$$

$$\textit{Progr.}\ a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5, ab^6, ab^7 \ldots ab^{n-1}.$$

Ainsi, quand cette progression est de n termes, le dernier terme est $=ab^{n-1}$. Il faut remarquer ici, que si l'exposant b est plus grand que l'unité, les termes augmentent continuellement; que si l'exposant $b=1$, les termes sont tous égaux; enfin, que si l'exposant b est plus petit que 1, ou qu'il ait une fraction, les termes décroissent sans cesse. Ainsi quand $a=1$ & $b=\frac{1}{2}$, on a cette progression géométrique:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{32}, \tfrac{1}{64}, \tfrac{1}{128}, \&c.$$

507.

Ici se présentent donc à considérer:

I.) Le premier terme que nous avons nommé a.

II.) L'exposant, que nous appellons b.

III.) Le nombre des termes, que nous avons indiqué par n.

IV.) Le dernier terme, que nous avons trouvé $=ab^{n-1}$.

Ainsi, quand les trois premieres de ces parties sont données, on trouve le dernier terme, en multipliant par le premier terme a la $n-1^e$ puissance de b, ou b^{n-1}.

Si on demandoit donc le 50^e terme de la progression géométrique 1, 2, 4, 8, &c. on auroit $a=1$, $b=2$ & $n=50$; par conséquent le 50^e terme $=2^{49}$. Or 2^9 étant $=512$; 2^{10} sera $=1024$. Donc le quarré de 2^{10}, ou 2^{20}, $=1048576$, & le quarré de ce nombre, ou 1099511627776 $=2^{40}$. Multipliant donc cette valeur de 2^{40} par 2^9 ou par 512, on a 2^{49} égalant 562949953421312.

508.

Une des principales questions qui se présentent dans cette matiere, c'est de trouver

la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique; nous allons donc en expliquer la méthode. Soit donnée d'abord la progreſſion ſuivante, compoſée de dix termes:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, dont nous indiquerons la ſomme par s, de ſorte que:

$s = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$, nous aurons, en prenant le double de part & d'autre, $2s = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 1024$. Otant de ceci la progreſſion indiquée par s, il reſte $s = 1024 - 1 = 1023$; donc la ſomme cherchée $= 1023$.

509.

Suppoſons maintenant que dans la même progreſſion le nombre des termes ſoit indéterminé & $= n$, de façon que la ſomme en queſtion, ou s, ſoit $= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots 2^{n-1}$. Si on multiplie par 2, on a $2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots 2^n$, & ſouſtrayant de

cette égalité la précédente, on a $s = 2^n - 1$. On voit donc que la ſomme cherchée ſe trouve, en multipliant le dernier terme, 2^{n-1}, par l'expoſant 2, afin d'avoir 2^n, & en ſouſtrayant de ce produit l'unité.

510.

Cela devient encore plus clair par les exemples ſuivans, où nous ſubſtituerons ſucceſſivement à n les nombres 1, 2, 3, 4, &c.

$1 = 1$; $1 + 2 = 3$; $1 + 2 + 4 = 7$; $1 + 2 + 4 + 8 = 15$; $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$; $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$, &c.

511.

On propoſe ordinairement dans cette matiere la queſtion qui ſuit: Un homme propoſe de vendre ſon cheval par les cloux, qui ſont au nombre de 32; il demande 1 liard pour le premier clou, 2 liards pour le ſecond clou, 4 liards pour le troiſieme clou, 8 liards pour le quatrieme, & ainſi

de ſuite, en demandant pour chaque clou le double du prix du précédent. On demande quel ſeroit le prix du cheval?

Cette queſtion ſe réduit évidemment à trouver la ſomme de tous les termes de la progreſſion géométrique 1, 2, 4, 8, 16, &c. continuée juſqu'au 32e terme. Or ce dernier terme eſt 2^{31}; & comme nous avons trouvé plus haut $2^{20}=1048576$, & $2^{10}=1024$, nous aurons $2^{20}.2^{10}=2^{30}$ égal à 1073741824; & en multipliant encore par 2, le dernier terme $2^{31}=2147483648$; en doublant donc ce nombre & en retranchant l'unité du produit, la ſomme cherchée devient 4294967295 liards. Ces liards font $1073741823\frac{3}{4}$ ſous, & diviſant par 20 on a 53687091 liv. 3 ſ. 9 den. pour le prix cherché.

512.

Soit à préſent l'expoſant $=3$, & qu'il s'agiſſe de trouver la ſomme de la progreſſion géométrique 1, 3, 9, 27, 81, 243,

729, compoſée de 7 termes. Suppoſons-la pour un moment $=s$, de ſorte que

$$s=1+3+9+27+81+243+729.$$

Nous aurons, en multipliant par 3:

$$3s=3+9+27+81+243+729+2187.$$

Et ſouſtrayant la ſérie précédente, nous avons $2s=2187-1=2186$. Ainſi le double de la ſomme eſt $=2186$, & par conſéquent la ſomme cherchée $=1093$.

513.

Soit dans la même progreſſion le nombre des termes $=n$, & la ſomme $=s$; de ſorte que $s=1+3+3^2+3^3+3^4+\ldots\, 3^{n-1}$. Si on multiplie par 3, on a $3s=3+3^2+3^3+3^4+\ldots\, 3^n$. Souſtrayant de ceci la valeur de s, comme tous les termes de celle-ci, excepté le premier, détruiſent tous les termes de la valeur de $3s$, excepté le dernier, on aura $2s=3^n-1$; donc $s=\frac{3^n-1}{2}$. Ainſi la ſomme cherchée ſe trouve en multipliant le dernier terme

par 3, en soustrayant 1 du produit, & en divisant le reste par 2. C'est ce qu'on voit aussi par les exemples suivans: $1=1$; $1+3=\frac{3.3-1}{2}=4$; $1+3+9=\frac{3.9-1}{2}=13$; $1+3+9+27=\frac{3.27-1}{2}=40$; $1+3+9+27+81=\frac{3.81-1}{2}=121$.

514.

Supposons maintenant, en général, le premier terme $=a$, l'exposant $=b$, le nombre des termes $=n$, & leur somme $=s$, en sorte que

$$s=a+ab+ab^2+ab^3+ab^4+\ldots\; ab^{n-1}.$$

Si nous multiplions par b, nous avons $bs=ab+ab^2+ab^3+ab^4+ab^5+\ldots\; ab^n$, & soustrayant l'égalité précédente il reste $(b-1)s=ab^n-a$; d'où nous tirons facilement la somme cherchée $s=\frac{ab^n-a}{b-1}$. Par conséquent la somme d'une progression géométrique quelconque se trouve, si on multiplie le dernier terme par l'exposant de la progression, qu'on soustraie du produit le

premier terme & qu'on divise le reste par l'exposant diminué de l'unité.

515.

Soit une progression géométrique de sept termes, dont le premier $=3$, & que l'exposant soit $=2$, on aura $a=3$, $b=2$ & $n=7$; donc le dernier terme $=3.2^6$, ou $3.64=192$; & la progression entiere sera

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.

Si de plus on multiplie le dernier terme 192 par l'exposant 2, on a 384; ôtant le premier terme 3, il reste 381; & divisant ceci par $b-1$ ou par 1, on a 381 pour la somme de toute la progression.

516.

Soit encore une autre progression géométrique de six termes, que 4 en soit le premier, & que l'exposant soit $=\frac{3}{2}$. La progression est

$$4,\ 6,\ 9,\ \frac{27}{2},\ \frac{81}{4},\ \frac{243}{8}.$$

Multiplions ce dernier terme $\frac{243}{8}$ par l'expoſant $\frac{3}{2}$, nous aurons $\frac{729}{16}$; la ſouſtraction du premier terme 4 laiſſe le reſte $\frac{665}{16}$, qui, diviſé par $b-1=\frac{1}{2}$, donne $\frac{665}{8}=83\frac{1}{8}$.

517.

Lorſque l'expoſant eſt plus petit que 1, & que, par conſéquent, les termes de la progreſſion vont toujours en diminuant, on peut indiquer la ſomme d'une telle progreſſion décroiſſante qui iroit à l'infini.

Soit, par exemple, le premier terme $=1$, l'expoſant $=\frac{1}{2}$, & la ſomme $=s$, en ſorte que:

$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+$, &c. ſans fin.

Si on multiplie par 2, on a

$2s=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+$, &c. ſans fin.

Et ſouſtrayant la progreſſion précédente, il reſte $s=2$ pour la ſomme de la progreſſion infinie propoſée.

518.

Si le premier terme $=1$, l'expoſant $=\frac{1}{3}$, & la ſomme $=s$; de façon que

$s=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+$, &c. à l'infini.

On multipliera le tout par 3, on aura

$3s=3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+$ &c. à l'infini; & ſouſtrayant la valeur de s, il reſte $2s=3$; donc la ſomme $s=1\frac{1}{2}$.

519.

Qu'on ait une progreſſion dont la ſomme $=s$, le premier terme $=2$, l'expoſant $=\frac{3}{4}$; de façon que

$s=2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}+$, &c. à l'infini.

Multipliant par $\frac{4}{3}$ on aura $\frac{4}{3}s=\frac{8}{3}+2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}+$, &c. ſans fin. Or ſouſtrayant la progreſſion s, il reſte $\frac{1}{3}s=\frac{8}{3}$; donc la ſomme cherchée $=8$.

520.

Si on ſuppoſe, en général, le premier terme $=a$, & l'expoſant de la progreſſion

$=\frac{b}{c}$, de maniere que cette fraction ſoit plus petite que 1, & par conſéquent c plus grand que b; voici comment on trouvera la ſomme de cette progreſſion pouſſée à l'infini: on fera

$$ſ = a + \frac{ab}{c} + \frac{abb}{cc} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} +, \text{ \&c.}$$

ſans fin.

Multipliant par $\frac{b}{c}$, on aura

$$\frac{b}{c}ſ = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ \&c. à l'infini.}$$

Et ſouſtrayant cette égalité de la précédente, il reſte $(1 - \frac{b}{c})ſ = a$.

Par conſéquent $ſ = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$.

Si on multiplie les deux termes de cette fraction par c, on a $ſ = \frac{ac}{c-b}$. La ſomme de la progreſſion géométrique infinie propoſée ſe trouve donc en diviſant le premier terme a par 1 moins l'expoſant, ou bien en multipliant le premier terme a par le dénominateur de l'expoſant, & en diviſant le produit par le même dénominateur diminué du numérateur de l'expoſant.

521.

On trouve de la même maniere les ſommes des progreſſions, dont les termes ſont affectés alternativement des ſignes + & —. Soit, par exemple,

$$ſ = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} -, \text{ \&c.}$$

Si on multiplie par $\frac{b}{c}$, on a

$$\frac{b}{c}ſ = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \text{ \&c.}$$

Et ſi on ajoute cette égalité à la précédente, on obtient $(1 + \frac{b}{c})ſ = a$. D'où l'on tire la ſomme cherchée $ſ = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}}$, ou $ſ = \frac{ac}{c+b}$.

522.

On voit donc que ſi le premier terme $a = \frac{3}{5}$, & l'expoſant $= \frac{2}{5}$, c'eſt-à-dire, $b = 2$ & $c = 5$, on trouvera la ſomme de la progreſſion $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625} + \text{\&c.} = 1$;

puisqu'en soustrayant l'exposant de 1 il restera $\frac{3}{5}$, & qu'en divisant le premier terme par ce reste, le quotient est 1.

On voit en second lieu que si les termes sont alternativement positifs & négatifs, & que la progression ait cette forme :

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} + \&c.$$

la somme sera

$$\frac{a}{1+\frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}.$$

523.

Autre exemple. Soit la progression infinie

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \&c.$$

Le premier terme est ici $\frac{3}{10}$, & l'exposant est $\frac{1}{10}$. Soustrayant ce dernier de 1, il reste $\frac{9}{10}$; & si l'on divise le premier terme par cette fraction, il vient $\frac{1}{3}$ pour la somme de la progression donnée. Ainsi en ne prenant qu'un terme de la progression, savoir $\frac{3}{10}$, l'erreur seroit de $\frac{1}{30}$.

En prenant deux termes, $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$, il s'en faudroit encore de $\frac{1}{300}$ que la somme ne fût $= \frac{1}{3}$.

524.

Autre exemple. Soit donnée la progression infinie :

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \&c.$$

Le premier terme est 9, l'exposant est $\frac{1}{10}$. Ainsi 1 moins l'exposant fait $\frac{9}{10}$; & $\frac{9}{\frac{9}{10}} = 10$, somme cherchée.

On remarquera que cette suite s'exprime par une fraction décimale en cette maniere, 9,9999999, &c.

CHAPITRE XII.

Des Fractions décimales infinies.

525.

Nous avons vu plus haut que dans les calculs logarithmiques on emploie des fractions décimales au lieu des fractions ordi-

naires; cela se pratique aussi avec beaucoup d'avantage dans d'autres calculs. Il s'agira principalement de faire voir comment on transforme une fraction ordinaire en une fraction décimale, & comment on peut exprimer réciproquement la valeur d'une fraction décimale par une fraction ordinaire.

526.

Qu'on ait généralement à changer en fraction décimale la fraction $\frac{a}{b}$: comme cette fraction exprime le quotient de la division du numérateur a par le dénominateur b, on écrira à la place de a la formule a,0000000, dont la valeur ne differe pas du tout de celle de a, puisqu'elle ne contient ni dixiemes, ni centiemes &c. On divisera ensuite cette formule par le nombre b, suivant les regles ordinaires de la division, & en observant seulement de mettre à la place convenable la virgule qui sépare les décimales & les entiers. Voilà tout le procédé,

& nous allons l'éclaircir par quelques exemples.

Soit donnée d'abord la fraction $\frac{1}{2}$, la division en décimales prendra cette forme:

$$\frac{2)1,0000000}{0,5000000} = \frac{1}{2}.$$

Nous voyons par-là que $\frac{1}{2}$ est autant que 0,5000000 ou que 0,5; & en effet cela est évident, puisque cette fraction décimale indique $\frac{5}{10}$, qui équivalent à $\frac{1}{2}$.

527.

Que $\frac{1}{3}$ soit la fraction donnée, on aura

$$\frac{3)1,0000000}{0,3333333} = \frac{1}{3}.$$

Cela fait voir que la fraction décimale, dont la valeur $= \frac{1}{3}$, ne peut, à la rigueur, être discontinuée nulle part, & qu'elle va à l'infini en conservant toujours le nombre 3. Aussi avons-nous trouvé plus haut que les fractions $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$, &c. à l'infini, ajoutées ensemble font $\frac{1}{3}$.

La fraction décimale qui exprime la valeur de $\frac{2}{3}$, se continue de même à l'infini, car on a

$$\frac{3)2{,}0000000}{1{,}6666666} = \frac{2}{3}.$$

Et cela suit d'ailleurs évidemment de ce que nous venons de dire, parce que $\frac{2}{3}$ est le double de $\frac{1}{3}$.

528.

Si $\frac{1}{4}$ est la fraction proposée, on a

$$\frac{4)1{,}0000000}{0{,}2500000} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi $\frac{1}{4}$ est autant que 0,2500000 ou que 0,25; & cela est clair, puisque $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

On auroit pareillement pour la fraction $\frac{3}{4}$

$$\frac{4)3{,}0000000}{0{,}7500000} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi $\frac{3}{4} = 0{,}75$; & en effet $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

La fraction $\frac{5}{4}$ se change en fraction décimale, en faisant

$$\frac{4)5{,}0000000}{1{,}2500000} = \frac{5}{4}.$$

Or $1 + \frac{25}{100} = \frac{5}{4}$.

529.

On trouvera de la même maniere $\frac{1}{5} = 0{,}2$; $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{4}{5} = 0{,}8$; $\frac{5}{5} = 1$; $\frac{6}{5} = 1{,}2$, &c.

Quand le dénominateur est 6, on trouve $\frac{1}{6} = 0{,}1666666$ &c. ce qui est autant que $0{,}666666 - 0{,}5$. Or $0{,}666666 = \frac{2}{3}$ & $0{,}5 = \frac{1}{2}$, donc en effet $0{,}1666666 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

On trouve aussi $\frac{2}{6} = 0{,}333333$ &c. $= \frac{1}{3}$; mais $\frac{3}{6}$ devient $0{,}5000000 = \frac{1}{2}$. Ensuite $\frac{5}{6} = 0{,}833333 = 0{,}333333 + 0{,}5$, c'est-à-d. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

530.

Lorsque le dénominateur est 7, les fractions décimales deviennent plus compliquées. Par exemp. on trouve $\frac{1}{7} = 0{,}142857$ &c. cependant il faut remarquer que ces six chiffres 142857 reviennent constam-

ment. Pour se convaincre donc que cette fraction décimale exprime précisément la valeur de $\frac{1}{7}$, on peut la transformer en une progression géométrique, dont le premier terme soit $=\frac{142857}{1000000}$, & l'exposant $=\frac{1}{1000000}$; & par conséquent la somme $=\frac{\frac{142857}{1000000}}{1-\frac{1}{1000000}}$ $=\frac{142857}{999999}$ (en multipliant les deux termes par 1000000) $=\frac{1}{7}$.

531.

On peut prouver encore d'une maniere plus facile, que la fraction décimale trouvée fait exactement $\frac{1}{7}$; car posant pour sa valeur la lettre s, on a

$$s=0,142857142857142857 \text{ \&c.}$$
$$10s=1,42857142857142857 \text{ \&c.}$$
$$100s=14,2857142857142857 \text{ \&c.}$$
$$1000s=142,857142857142857 \text{ \&c.}$$
$$10000s=1428,57142857142857 \text{ \&c.}$$
$$100000s=14285,7142857142857 \text{ \&c.}$$
$$1000000s=142857,142857142857 \text{ \&c.}$$
Soustrayez $s=\quad 0,142857142857 \text{ \&c.}$
$$999999s=142857.$$

Et divisant par 999999, vous aurez $s=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7}$. Donc la fraction décimale, qu'on avoit fait $=s$, est $=\frac{1}{7}$.

532.

On transformera de la même maniere $\frac{2}{7}$ en une fraction décimale, qui sera 0,28571428 &c. & cela nous conduit à trouver plus facilement la valeur de la fraction décimale que nous venons de supposer $=s$; parce que 0,28571428, &c. doit être le double de celle-là, & par conséquent $=2s$. Car nous avons eu

$$100s=14,28571428571 \text{ \&c.}$$
ainsi en soustrayant $2s=\ 0,28571428571 \text{ \&c.}$
il reste $98s=14$
donc $s=\frac{14}{98}=\frac{1}{7}$.

On trouve aussi $\frac{3}{7}=0,42857142857$ &c. ce qui, après notre supposition, doit être $=3s$; or nous avons trouvé

$$10s=1,42857142857, \text{ \&c.}$$
ainsi en soustrayant $3s=0,42857142857, \text{ \&c.}$
nous avons $7s=1$, donc $s=\frac{1}{7}$.

533.

Ainsi quand une fraction proposée a le dénominateur 7, la fraction décimale est infinie, & 6 chiffres y sont continuellement répétés. La raison en est, comme il est facile de s'en appercevoir, qu'en continuant la division il faut qu'on revienne tôt ou tard à un résidu qu'on aura déjà eu. Or il ne peut rester dans cette division que 6 nombres différens, savoir 1, 2, 3, 4, 5, 6; ainsi, après la sixieme division au plus tard, il faut que les mêmes chiffres reviennent; mais lorsque le dénominateur est de nature à faire parvenir à une division sans reste, ces cas-là ne peuvent avoir lieu.

534.

Supposons à présent que 8 soit le dénominateur de la fraction proposée, on trouvera les fractions décimales qui suivent:

$\frac{1}{8}=0,125$; $\frac{2}{8}=0,250$; $\frac{3}{8}=0,375$;
$\frac{4}{8}=0,500$; $\frac{5}{8}=0,625$; $\frac{6}{8}=0,750$;
$\frac{7}{8}=0,875$, &c.

535.

Si le dénominateur est 9, on a $\frac{1}{9}=0,111$ &c. $\frac{2}{9}=0,222$ &c. $\frac{3}{9}=0,333$&c.

Si le dénominateur est 10, on a $\frac{1}{10}=0,100$; $\frac{2}{10}=0,200$; $\frac{3}{10}=0,3$. Cela est clair par la nature de la chose, de même que $\frac{1}{100}=0,01$; que $\frac{37}{100}=0,37$; que $\frac{256}{1000}=0,256$; que $\frac{24}{10000}=0,0024$, &c.

536.

Que 11 soit le dénominateur de la fraction proposée, on aura $\frac{1}{11}=0,0909090$, &c. Or supposons qu'on veuille trouver la valeur de cette fraction décimale, & nommons-la s, nous aurons $s=0,090909$, & $10s=00,909090$; de plus, $100s=9,09090$. Si donc nous soustrayons de ceci la valeur de s, nous aurons $99s=9$, & par conséquent $s=\frac{9}{99}=\frac{1}{11}$. Nous aurons aussi $\frac{2}{11}=0,181818$, &c. $\frac{3}{11}=0,272727$, &c. $\frac{6}{11}=0,545454$ &c.

537.

Il eſt donc un grand nombre de fractions décimales, où un, deux ou pluſieurs chiffres reviennent conſtamment, & qui continuent de cette maniere juſqu'à l'infini. De telles fractions ſont aſſez remarquables, & nous allons faire voir comment on peut trouver aiſément leurs valeurs (*).

(*) Ces fractions décimales périodiques fourniſſent matiere à pluſieurs recherches intéreſſantes; j'avois commencé à m'en occuper, même avant que d'avoir vu cette Algebre, & j'aurois peut-être continué, ſi je n'attendois auſſi l'occaſion de voir un Mémoire inſéré dans les *Tranſactions philoſophiques* pour 1769, & intitulé *of the Theory of circulating Fractions*. Je me contenterai de rapporter ici le raiſonnement par lequel j'avois commencé.

Soit $\frac{N}{D}$ une fraction réelle quelconque irréductible à de moindres termes; on demande juſqu'à combien de chiffres il faudra la réduire en décimales, avant que les mêmes termes ou chiffres reviennent. Je ſuppoſe que $10N$ ſoit plus grand que D; ſi cela n'étoit pas, mais que $100N$ ou $1000N$ ſeulement fût $> D$, il faudroit commencer par voir ſi $\frac{10N}{D}$ ou $\frac{100N}{D}$ &c. ſe réduit à de moindres termes, ou à une fraction $\frac{N'}{D'}$.

Suppoſons d'abord qu'un ſeul chiffre ſoit toujours répété, & indiquons-le par a, de ſorte que $s = 0,aaaaaaa$. Nous avons

$$10s = a,aaaaaaa,$$

& ſouſtrayant $s = 0,aaaaaaa$

nous aurons $9s = a$; donc $s = \frac{a}{9}$.

Cela poſé, je dis que la même période ne peut revenir que lorſque dans la diviſion continuelle qu'on fait, le même réſidu N revient. Suppoſons que juſqu'alors on ait ajouté s zéros, & que Q ſoit le nombre du quotient en entier, & abſtraction faite de la virgule, on aura $\frac{N \times 10^s}{D} = Q + \frac{N}{D}$; donc $Q = \frac{N}{D} \times (10^s - 1)$. Or Q devant être un nombre entier, il s'agit de déterminer pour s le plus petit nombre entier, tel que $\frac{N}{D} \times (10^s - 1)$, ou ſeulement que $\frac{10^s - 1}{D}$ ſoit un nombre entier.

Ce problême demande qu'on diſtingue différens cas: le premier eſt celui où D eſt un diviſeur de 10, ou de 100 ou de 1000 &c. & il eſt clair que dans ce cas aucune fraction périodique ne peut avoir lieu. Nous prendrons pour le ſecond cas celui où D eſt un nombre impair, & qui ne ſoit pas un facteur d'une puiſſance de 10; dans ce cas la valeur de s peut aller juſqu'à $D-1$, mais ſouvent elle eſt moindre. Un troiſieme cas enfin eſt celui où D eſt pair, & où par conſéquent, ſans être un facteur d'une puiſſance de 10, il a cependant un

Lorſque deux chiffres ſont répétés, comme *ab*, on a $s=0,abababa$. Donc $100s=ab,ababab$; & ſi on en ſouſtrait s, il reſte $99s=ab$; par conſéquent $s=\frac{ab}{99}$.

Lorſque trois chiffres, comme *abc*, ſe trouvent répétés, on a $s=a,abcabcabc$; par conſéquent $1000\,s=abc,abcabc$; & en ſouſtrayant s, il reſte $999\,s=abc$; donc $s=\frac{abc}{999}$, & ainſi de ſuite.

538.

Toutes les fois donc qu'une fraction décimale de cette eſpece ſe préſente, il eſt facile d'en trouver la valeur. Soit donnée, par exemple, celle-ci, 0,296296, ſa valeur ſera $=\frac{296}{999}=\frac{8}{27}$, en diviſant les deux termes par 37.

commun diviſeur avec une de ces puiſſances. Ce commun diviſeur ne peut être qu'un nombre de la forme 2^c; ſi donc $\frac{D}{2^c}=d$, je dis que les périodes ſeront les mêmes que pour la fraction $\frac{N}{d}$, mais qu'elles ne commenceront qu'au chiffre déſigné par *c*. Ainſi ce cas revient au ſecond cas, & il eſt évident au reſte que c'eſt celui-ci qui fait l'eſſentiel de cette théorie.

Cette fraction doit redonner la fraction décimale propoſée; & on peut ſe convaincre facilement que ce réſultat a lieu en effet, en diviſant 8 par 9, & après cela le quotient par 3, parce que $27=3.9$. On a

9)8,0000000
3)0,8888888
0,2962962 &c.

ce qui eſt la fraction décimale propoſée.

539.

Donnons encore un exemple aſſez curieux, en changeant en fraction décimale la fraction $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$, ce qui ſe fait de la maniere qu'on va voir:

2)1,00000000000000
3)0,50000000000000
4)0,16666666666666
5)0,04166666666666
6)0,00833333333333
7)0,00138888888888
8)0,00019841269841
9)0,00002480158730
10)0,00000275573192
0,00000027557319.

CHAPITRE XIII.

Des Calculs d'intérêts (*).

540.

ON a coutume d'exprimer les intérêts d'un capital en *pourcents*, en disant combien on paie annuellement d'intérêt de la somme de 100. Il est assez ordinaire qu'on place son capital à 5 pour cent, c'est-à-dire,

(*) La théorie du calcul de l'intérêt doit ses premiers progrès à *Leibnitz*, qui en donna les principaux élémens dans les *Acta Eruditorum* de Leipsig pour 1683. Elle a fourni matiere ensuite à plusieurs dissertations détachées très-intéressantes; ceux qui l'ont le plus avancée, sont les Mathématiciens qui ont travaillé sur l'Arithmétique politique, dans laquelle on combine d'une maniere véritablement utile le calcul des probabilités, le calcul de l'intérêt & les données que fournissent depuis environ un siecle les régitres mortuaires. De bons élémens d'Arithmétique politique nous manquent encore, quoique cette branche des Mathématiques, aussi belle qu'étendue, ait été fort cultivée en Angleterre, en France & en Hollande.

de maniere qu'on tire 5 écus d'intérêt d'un capital de 100 écus. Ainsi rien de plus facile que de calculer les intérêts d'un capital quelconque: on n'a qu'à dire, suivant la regle de trois:

100 donnent 5; que donne le capital proposé? Soit, par exemple, le capital 860 écus, on trouve son intérêt annuel, en disant:

100:5 = 860 à.... *Rép.* 43 écus.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 100)4300 \\ \hline 43. \end{array}$$

541.

Nous ne nous arrêterons pas à ces calculs de l'intérêt simple, afin de passer aussi-tôt au calcul de l'*intérêt sur intérêt*. On demande principalement dans ce calcul, à quelle somme monte un capital donné après un certain nombre d'années, si on joint annuellement l'intérêt au capital, & que de cette maniere on augmente continuellement

le capital? On part, pour résoudre cette question, de ce que 100 écus placés à 5 pour cent se changent au bout d'une année en un capital de 105 écus. Soit le capital $=a$, on trouvera ce qu'il vaut au bout de l'année, en disant: 100 donne 105, que donne a; la réponse est $\frac{105a}{100}=\frac{21a}{20}$, ce que l'on peut aussi écrire de cette maniere, $\frac{21}{20}.a$, ou de celle-ci, $a+\frac{1}{20}.a$.

542.

Ainsi, quand on ajoute au capital actuel sa vingtieme partie, on obtient la valeur du capital pour l'année prochaine. Ajoutant à celui-ci son vingtieme, on sait ce que vaut le capital donné après deux ans, & ainsi de suite. Il est donc facile d'apprécier les accroissemens successifs & annuels du capital, & de continuer ce calcul aussi loin qu'on voudra.

543.

Supposons un capital qui soit présentement de 1000 écus, qu'il soit placé à cinq pour

pour cent, & qu'on joigne chaque année l'intérêt au capital. Comme ce calcul ne tarde pas à conduire à des fractions, nous nous servirons des fractions décimales, mais sans les pousser plus loin que jusqu'aux milliemes parties d'un écu, vu que des parties plus petites n'entrent pas ici en considération.

Le capital donné de 1000 écus vaudra

après 1 an — — —	1050 écus
	52,5,
après 2 ans — — —	1102,5
	55,125,
après 3 ans — — —	1157,625
	57,881,
après 4 ans — — —	1215,506
	60,775,
après 5 ans — — —	1276,281 &c.

544.

On peut continuer de la même maniere pour autant d'années qu'on voudra; mais lorsque le nombre des années est fort grand, le calcul devient long & ennuyeux; voici comment on peut l'abréger:

Soit le capital préſent $=a$, & puiſqu'un capital de 20 écus vaut 21 écus au bout de l'année, le capital a vaudra $\frac{21}{20}a$ après un an. Le même capital montera l'année ſuivante à $\frac{21^2}{20^2}.a=\left(\frac{21}{20}\right)^2.a$. Ce capital de deux ans vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^3.a$ l'année d'après ; ce qui ſera donc le capital de trois ans. Celui-ci augmentant de même, le capital donné vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^4.a$ au bout de quatre ans. Il vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^5.a$ au bout de cinq ans. Après un ſiecle il vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}.a$; & en général $\left(\frac{21}{20}\right)^n.a$ ſera la valeur de ce capital après n années ; & cette formule ſervira à déterminer la quantité du capital après un nombre quelconque d'années.

545.

La fraction $\frac{21}{20}$ qui eſt entrée dans ce calcul, ſe fonde ſur ce que les intérêts ont été comptés à 5 pour cent, & que $\frac{21}{20}$ eſt autant que $\frac{105}{100}$. Que ſi les intérêts ſe comptoient à 6 pour cent, le capital a monteroit à $\left(\frac{106}{100}\right).a$ au bout d'un an ; à $\left(\frac{106}{100}\right)^2.a$ au bout de deux ans ; & à $\left(\frac{106}{100}\right)^n.a$ au bout de n années.

Mais ſi les intérêts ne ſont que de 4 pour cent, le capital a ne vaudra que $\left(\frac{104}{100}\right)^n.a$ après n ans.

546.

Or il eſt aiſé, lorſque le capital a, ainſi que le nombre des années, eſt donné, de réſoudre ces formules par les logarithmes. Car s'il eſt queſtion de celle que nous avons trouvée dans la premiere ſuppoſition, on prendra le logarithme de $\left(\frac{21}{20}\right)^n.a$, qui eſt $=\log.\left(\frac{21}{20}\right)^n+\log.a$; parce que la formule en queſtion eſt le produit de $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ & de a. Et comme $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ eſt une puiſſance, on aura $L.\left(\frac{21}{20}\right)^n=nL.\frac{21}{20}$. Ainſi le logarithme du capital cherché eſt $=n.L.\frac{21}{20}$

$+$ L. a. De plus le logarithme de la fraction $\frac{21}{20}$ = L. 21 — L. 20.

547.

Soit à présent le capital = 1000 écus, & qu'on demande de combien il sera au bout de 100 ans, en comptant les intérêts à 5 pour cent?

Nous avons ici n = 100. Le logarithme du capital cherché sera par conséquent = 100 L. $\frac{21}{20}$ + L. 1000, & voici comment on évalue cette quantité:

	L. 21 = 1,3222193
soustrayant	L. 20 = 1,3010300
	L. $\frac{21}{20}$ = 0,0211893
multipliant par	100
	100 L. $\frac{21}{20}$ = 2,1189300
ajoutant	L. 1000 = 3,0000000
logarithme du capital cherché.	= 5,1189300

On voit par la caractéristique de ce logarithme, que le capital cherché sera un nombre de six chiffres, & en effet ce capital se trouve = 131501 écus.

548.

Un capital de 3452 livres à 6 pour cent, de combien sera-t il après 64 ans?

Nous avons ici a = 3452, & n = 64. Donc le logarithme du capital cherché = 64 L. $\frac{53}{50}$ + L. 3452, ce qu'on calcule de cette maniere:

	L. 53 = 1,7242759
soustrayant	L. 50 = 1,6989700
	L. $\frac{53}{50}$ = 0,0253059
multipl. par 64:	64 L. $\frac{53}{50}$ = 1,6195776
	L. 3452 = 3,5380708
	5,1576484.

Et en prenant le nombre de ce logarithme, on trouve le capital cherché égal à 143763 livres.

549.

Quand le nombre des années est fort grand, comme il s'agit de multiplier ce

nombre par le logarithme d'une fraction, il pourroit provenir une assez grande erreur de ce que les logarithmes ne se trouvent calculés dans les tables que jusqu'à 7 chiffres de décimales. C'est pourquoi il faudra employer des logarithmes poussés à un plus grand nombre de figures, comme on l'a fait dans l'exemple suivant:

Un capital d'un écu restant placé à 5 pour cent pendant 500 ans, & les intérêts s'y joignant annuellement, on demande à quelle somme se montera ce capital après les 500 années?

On a ici $a=1$ & $n=500$; par conséquent le logarithme du capital cherché est égal à $500\,L.\frac{21}{20}+L.\,1$, ce qui produit ce calcul:

	L. 21 = 1,322219294733919
soustrayant	L. 20 = 1,301029995663981
	L. $\frac{21}{20}$ = 0,021189299069938
mult. par 500 on a	10,594649534969000

Voilà donc le logarithme du capital cherché, lequel sera par conséquent égal à 39323200000 écus.

550.

Si on ne se contentoit pas de joindre annuellement l'intérêt au capital, & qu'on voulût encore l'augmenter tous les ans d'une nouvelle somme $=b$, le capital actuel que nous nommerons a, s'accroîtroit chaque année de la maniere qu'on verra:

après 1 an $\frac{21}{20}a+b$,

après 2 ans $(\frac{21}{20})^2a+\frac{21}{20}b+b$,

après 3 ans $(\frac{21}{20})^3a+(\frac{21}{20})^2b+\frac{21}{20}b+b$,

après 4 ans $(\frac{21}{20})^4a+(\frac{21}{20})^3b+(\frac{21}{20})^2b$
$+(\frac{21}{20})b+b$,

après n ans $(\frac{21}{20})^na+(\frac{21}{20})^{n-1}b+(\frac{21}{20})^{n-2}b$
$+\ldots\ldots\frac{21}{20}b+b$.

Ce capital consiste, comme on voit, en deux parties, dont la premiere $=(\frac{21}{20})^na$, & dont l'autre prise à rebours forme la série $b+\frac{21}{20}b+(\frac{21}{20})^2b+(\frac{21}{20})^3b+\ldots(\frac{21}{20})^{n-1}b$. Cette suite est évidemment une progression géométrique, dont l'exposant est egal à $\frac{21}{20}$.

Nous en chercherons donc la somme, en multipliant d'abord le dernier terme $\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}b$ par l'exposant $\frac{21}{20}$; nous aurons $\left(\frac{21}{20}\right)^n b$. Soustrayant ensuite le premier terme b, il reste $\left(\frac{21}{20}\right)^n b - b$; & divisant enfin par l'exposant moins 1, c'est-à-dire par $\frac{1}{20}$, nous trouverons la somme cherchée $= 20\left(\frac{21}{20}\right)^n b - 20b$; donc le capital cherché est, $\left(\frac{21}{20}\right)^n a + 20\left(\frac{21}{20}\right)^n b - 20b = \left(\frac{21}{20}\right)^n . (a + 20b) - 20b$.

551.

Le développement de cette formule exige qu'on calcule séparément son premier terme $\left(\frac{21}{20}\right)^n . (a + 20b)$; ce qui se fait en prenant son logarithme, qui est $n\text{L}. \frac{21}{20} + \text{L}.(a+20b)$; car le nombre qui répond à ce logarithme dans les tables, sera la valeur de ce premier terme. Si l'on soustrait ensuite $20b$ de cette quantité, on connoît le capital cherché.

552.

Question. Quelqu'un a un capital de 1000 écus placé à cinq pour cent, il y ajoute annuellement 100 écus outre les intérêts, on demande la valeur de ce capital au bout de vingt-cinq ans?

Nous avons ici $a = 1000$; $b = 100$; $n = 25$; voici donc le plan de l'opération:

$$\text{L}. \tfrac{21}{20} = 0,021189299.$$

Multipliant par 25 on a

$$25\ \text{L}. \tfrac{21}{20} = 0,5297324750$$
$$\text{L}. (a + 20b) = 3,4771213135$$
$$= 4,0068537885.$$

Ainsi la premiere partie, ou le nombre qui répond à ce logarithme, est 10159,1 écus, & si on en soustrait $20b = 2000$, on trouve que le capital en question vaudra, après vingt-cinq ans, 8159,1 écus.

553.

Puis donc que ce capital de 1000 écus va toujours en augmentant, & qu'après

vingt-cinq ans il se monte à 8159 $\frac{1}{10}$ écus, on peut faire la question, en combien d'années il montera jusqu'à 1000000 écus.

Soit n ce nombre d'années, & puisque $a=1000$, $b=100$, le capital sera au bout de n ans:

$\left(\frac{21}{20}\right)^n(3000)-2000$, somme qui doit faire 1000000 d'écus; de-là résulte donc cette égalité ou équation:

$$3000\left(\frac{21}{20}\right)^n-2000=1000000.$$

Ajoutant des deux côtés 2000, on a

$$3000\left(\frac{21}{20}\right)^n=1002000.$$

Divisant de part & d'autre par 3000, il vient $\left(\frac{21}{20}\right)^n=334$.

Prenant les logarithmes, on a $n\,\mathrm{L}.\frac{21}{20}=\mathrm{L}.334$; & divisant par $\mathrm{L}.\frac{21}{20}$, on obtient $n=\frac{\mathrm{L}.334}{\mathrm{L}.\frac{21}{20}}$. Or $\mathrm{L}.334=2{,}5237465$, & $\mathrm{L}.\frac{21}{20}=0{,}0211893$; donc $n=\frac{2{,}5237465}{0{,}0211893}$. Et si l'on multiplie enfin les deux termes de cette fraction par 10000000, on aura $n=\frac{25237465}{211893}$, ce qui fait cent dix-neuf ans un mois sept jours, & c'est-là le temps après lequel le capital de 1000 écus se sera accru jusqu'à 1000000 d'écus.

554.

Mais si on supposoit que quelqu'un, au lieu d'augmenter annuellement son capital d'une certaine somme fixe, le diminuât en employant, chaque année, une certaine somme pour son entretien, on auroit les gradations suivantes pour les valeurs de ce capital a, année par année, en le supposant placé à 5 pour cent, & en entendant par b la somme qu'on en ôte annuellement:

après 1 an, $\frac{21}{20}a-b$,

après 2 ans, $\left(\frac{21}{20}\right)^2a-\frac{21}{20}b-b$,

après 3 ans, $\left(\frac{21}{20}\right)^3a-\left(\frac{21}{20}\right)^2b-\frac{21}{20}b-b$,

après n ans, $\left(\frac{21}{20}\right)^na-\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}b-\left(\frac{21}{20}\right)^{n-2}b \ldots\ldots-\left(\frac{21}{20}\right)b-b$.

555.

Ce capital consiste donc en deux parties, l'une est $\left(\frac{21}{20}\right)^na$, & l'autre qui doit en être

soustraite forme, en prenant les termes en rétrogradant, la progression géométrique suivante:

$$b+\left(\tfrac{21}{20}\right)b+\left(\tfrac{21}{20}\right)^2b+\left(\tfrac{21}{20}\right)^3b+\ldots\left(\tfrac{21}{20}\right)^{n-1}b.$$

Nous avons déjà trouvé ci-dessus la somme de cette progression $=20\left(\frac{21}{20}\right)^n b-20b$; si donc on soustrait cette quantité de $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$, on aura le capital cherché, après n ans, $=\left(\frac{21}{20}\right)^n(a-20b)+20b$.

556.

On auroit pu tirer aussi cette formule immédiatement de la précédente. Car de même qu'on ajoutoit, dans la supposition précédente, annuellement la somme b, on ôte à présent chaque année la même somme b. On n'a donc qu'à mettre dans la formule précédente, par-tout $-b$ à la place de $+b$. Il faut remarquer principalement ici que, si $20b$ est plus grand que a, la premiere partie devient négative, & par conséquent que le capital va toujours en

diminuant. Cela se comprend aisément, car si on ôte plus du capital annuellement qu'il ne s'y joint d'argent en intérêts, il est clair que ce capital doit devenir continuellement plus petit, & qu'à la fin il doit même se réduire absolument à rien. C'est ce que nous allons éclaircir par un exemple.

557.

Question. Quelqu'un a un capital de 100000 écus placé à 5 pour cent; il lui faut chaque année 6000 écus pour son entretien; cela fait plus que les intérêts de son argent, lesquels ne se montent qu'à 5000 écus; par conséquent le capital ira toujours en diminuant. On demande en combien de temps il s'évanouira tout-à-fait. Supposons ce nombre d'années $=n$, & puisque $a=100000$ & $b=6000$, nous savons que après n ans la valeur du capital sera $=-20000\left(\frac{21}{20}\right)^n+120000$, ou $120000-20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$. Ainsi le capital se réduira à zéro, lorsque $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ se montera à

120000 écus, ou lorſque $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ égalera 120000. Diviſant des deux côtés par 20000, on a $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 6$. Prenant les logarithmes, on a $n\,\mathrm{L}.\frac{21}{20} = \mathrm{L}.6$. Diviſant par $\mathrm{L}.\frac{21}{20}$, il vient $n = \frac{\mathrm{L}.6}{\mathrm{L}.\frac{21}{20}} = \frac{0,7781513}{0,0211893}$, ou $n = \frac{7781513}{211893}$. Donc $n = 36$ ans 8 mois 22 jours, au bout duquel temps il ne reſtera plus rien du capital.

558.

Il ſera bon de faire voir auſſi comment, en partant des mêmes principes, on peut calculer les intérêts pour des temps plus courts que des années entieres. On ſe ſert pour cela de la formule $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ trouvée plus haut, qui exprime la valeur d'un capital placé à 5 pour cent après n années; car ſi le temps eſt de moins d'un an, l'expoſant n devient une fraction, & le calcul ſe fait par les logarithmes comme auparavant. Si on demandoit, par exemple, la valeur du capital après un jour, on feroit $n = \frac{1}{365}$; ſi c'eſt après deux jours, $n = \frac{2}{365}$, & ainſi de ſuite.

559.

Soit le capital $a = 100000$ écus, placé à 5 pour cent, à combien montera-t-il en huit jours de temps?

Nous avons $a = 100000$, & $n = \frac{8}{365}$, par conſéquent le capital cherché $= \left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}}$ 100000. Le logarithme de cette quantité eſt $= \mathrm{L}.\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} + \mathrm{L}.\ 100000 = \frac{8}{365}\ \mathrm{L}.\frac{21}{20} + \mathrm{L}.100000$. Or $\mathrm{L}.\frac{21}{20} = 0,0211893$,

multipliant par $\frac{8}{365}$ on a 0,0004644
ajoutant L. 100000 = 5,0000000

la ſomme eſt = 5,0004644.

Le nombre de ce logarithme ſe trouve $= 100107$. Ainſi dans les premiers huit jours les intérêts du capital font déjà 107 écus.

560.

Dans cette matiere ſe préſentent auſſi les queſtions d'eſtimer la valeur préſente d'une

somme d'argent qui ne seroit payable que dans quelques années. On considérera que, puisque 20 écus en argent comptant montent à 21 écus en douze mois, il faut que réciproquement 21 écus qu'on ne pourroit toucher qu'au bout d'un an, ne valent actuellement que 20 écus. Si donc on exprime par a une somme dont le payement écherroit au bout d'un an, la valeur présente de cette somme est $\frac{20}{21}a$. Ainsi pour trouver combien un capital a, payable seulement au bout d'un certain temps, vaudroit une année plutôt, il faudra le multiplier par $\frac{20}{21}$; pour trouver sa valeur deux ans avant l'échéance, on le multipliera par $(\frac{20}{21})^2 a$; & en général sa valeur, n ans avant l'échéance, s'exprimera par $(\frac{20}{21})^n a$.

561.

Supposons qu'un homme ait à tirer pendant cinq années consécutives une rente annuelle de cent écus, & qu'il veuille la céder pour de l'argent comptant, en comptant les intérêts à 5 pour cent, si on demande combien il doit recevoir, voici comment il faudra raisonner:

Pour 100 écus qui échoient

après 1 an	il reçoit	95,239.
après 2 ans	———	90,704.
après 3 ans	———	86,385.
après 4 ans	———	82,272.
après 5 ans	———	78,355.
somme des 5 termes		432,955.

Ainsi le Possesseur de la rente ne peut prétendre en argent comptant que 432,955 écus, ou 1298 livres 17 sous $3\frac{3}{5}$ deniers.

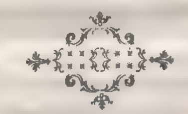
562.

On remarquera que si une telle rente devoit durer un nombre d'années beaucoup plus grand, le calcul, de la maniere que nous l'avons fait, deviendroit très-pénible, voici les moyens de le faciliter:

Soit la rente annuelle $= a$, commençant dès-à-présent & durant n années, elle vaudra actuellement:

$a+(\frac{20}{21})a+(\frac{20}{21})^2a+(\frac{20}{21})^3a+(\frac{20}{21})^4a \ldots\ldots$
$+(\frac{20}{21})^na.$

Voilà une progression géométrique, & tout se réduit à en trouver la somme. On multipliera donc le dernier terme par l'exposant, le produit est $(\frac{20}{21})^{n+1}a$; soustrayant le premier terme, il reste $(\frac{20}{21})^{n+1}a - a$; divisant enfin par l'exposant moins 1, c'est-à-dire, par $-\frac{1}{21}$, ou, ce qui revient au même, multipliant par -21, on aura la somme cherchée $= -21(\frac{20}{21})^{n+1}a + 21a$, ou bien, $21a - 21(\frac{20}{21})^{n+1}a$; & ce second terme qu'il s'agit de soustraire, se calcule facilement par les logarithmes.



SECTION QUATRIEME.

DES Equations algébriques, & de la résolution de ces Equations.

CHAPITRE PREMIER.

De la résolution des Problêmes en général.

563.

LE but principal de l'Algebre, ainsi que de toutes les parties des Mathématiques, est de déterminer la valeur de quantités, qui auparavant étoient inconnues. On l'atteint en pesant avec attention les conditions prescrites, lesquelles s'expriment toujours par des quantités connues. C'est aussi pourquoi on définit l'Algebre, *la science qui enseigne à déterminer des quantités inconnues par le moyen de quantités connues.*

564.

Ce que nous venons de dire s'accorde aussi avec tout ce qui a été exposé jusqu'ici. Par-tout on a vu la connoissance de certaines quantités faire arriver à celle d'autres quantités qu'on pouvoit auparavant regarder comme inconnues.

L'Addition en offroit d'abord un exemple. Pour trouver la somme de deux ou de plusieurs nombres donnés, il falloit chercher un nombre inconnu qui fût égal à ces nombres connus pris ensemble.

Dans la Soustraction on cherchoit un nombre qui fût égal à la différence de deux nombres connus.

Une multitude d'autres exemples se sont présentés dans la Multiplication & dans la Division, dans l'élévation des puissances & dans l'extraction des racines; la question se réduisoit toujours à trouver, par le moyen de quantités connues, une autre quantité inconnue jusqu'alors.

565.

Enfin dans la derniere section nous avons aussi résolu différentes questions, où il s'agissoit de déterminer un nombre qui ne pouvoit être conclu de la connoissance d'autres nombres donnés que sous de certaines conditions.

Toutes les questions se réduisent donc à trouver, par le secours de quelques nombres donnés, un nouveau nombre qui ait avec ceux-là une certaine connexion; & cette connexion se détermine par de certaines conditions ou propriétés qui doivent convenir à la quantité cherchée.

566.

Lorsqu'il se présente une question à résoudre, on indique par une des dernières lettres de l'Alphabet le nombre cherché, & on examine ensuite de quelle maniere les conditions données peuvent former une égalité entre deux quantités; cette égalité

qui est représentée par une espece de formule qu'on appelle *équation*, sert ensuite à déterminer la valeur du nombre cherché, & par conséquent à résoudre la question. Il arrive quelquefois qu'on cherche plusieurs nombres; on les trouve pareillement par des équations.

567.

Expliquons-nous mieux par un exemple, & supposons la question ou le *problême* qui suit:

Vingt personnes, hommes & femmes, mangent dans une auberge, l'écot d'un homme est 8 sous, celui d'une femme est 7 sous, & la dépense totale se monte à 7 l. 5 sous; on demande le nombre des hommes & celui des femmes?

On supposera, pour résoudre cette question, que le nombre des hommes soit $=x$, & regardant maintenant ce nombre comme connu, on procédera de la même maniere que si on vouloit faire la preuve &

voir si ce nombre satisfait à la question. Or le nombre des hommes étant $=x$, & les hommes & les femmes faisant ensemble vingt personnes, il est facile de déterminer le nombre des femmes, on n'a qu'à soustraire de 20 celui des hommes, c'est-à-dire que le nombre des femmes $=20-x$.

Mais un homme dépense 8 sous, donc x hommes dépensent $8x$ sous.

Et puisqu'une femme dépense 7 sous, $20-x$ femmes auront dépensé $140-7x$ sous.

Ainsi ajoutant ensemble $8x$ & $140-7x$, on voit que toutes les 20 personnes auront dépensé $140+x$ sous. Or on sait d'avance combien elles ont dépensé, savoir 7 liv. 5 sous, ou 145 sous; il faut donc qu'il y ait égalité entre $140+x$ & 145, c'est-à-dire qu'on ait l'équation $140+x=145$, & de-là on tire facilement $x=5$.

Donc l'écot étoit de 5 hommes & de 15 femmes.

568.

Autre question de la même espece.

Vingt personnes, hommes & femmes, se trouvent dans une auberge ; les hommes dépensent 24 florins, & les femmes autant, & il se trouve qu'un homme a dépensé 1 florin de plus qu'une femme ; on demande combien il y avoit d'hommes & combien de femmes ?

Soit le nombre des hommes $=x$,
celui des femmes sera $=20-x$.

Or ces x hommes ayant dépensé 24 florins, l'écot de chaque homme est de $\frac{24}{x}$ florins.

De plus les $20-x$ femmes ayant aussi dépensé 24 florins, l'écot de chaque femme est $\frac{24}{20-x}$ florins.

Mais on sait que cet écot d'une femme est d'un florin plus petit que celui d'un homme ; si donc on soustrait 1 de l'écot d'un homme, il faut qu'on obtienne celui d'une femme, & par conséquent que $\frac{24}{x}$

$-1=\frac{24}{20-x}$. Voilà donc l'équation de laquelle il s'agit de tirer la valeur de x ; on ne trouve pas cette valeur avec la même facilité que dans la question précédente ; mais on verra dans la suite que $x=8$, & cette valeur satisfait en effet à l'équation ; car $\frac{24}{8}-1=\frac{24}{12}$ renferme l'égalité $2=2$.

569.

On voit bien à quel point il est essentiel, dans tous les problêmes, de peser avec attention toutes les circonstances de la question, afin d'en déduire une équation, en exprimant par des lettres les nombres cherchés ou inconnus. Tout l'art consiste ensuite à résoudre ces équations pour en tirer les valeurs des nombres inconnus, & c'est de quoi nous nous occuperons dans cette section.

570.

Nous avons à remarquer d'abord une diversité qui réside dans les questions elles-

mêmes. Dans quelques-unes on ne cherche qu'une ſeule quantité inconnue, dans d'autres on en cherche deux ou pluſieurs; & il faut obſerver dans ce dernier cas qu'il faut, pour les déterminer toutes, pouvoir déduire des circonſtances ou des conditions du problême, autant d'équations qu'il y a d'inconnues.

571.

On a déjà pu s'appercevoir qu'une équation conſiſte en deux *membres* qu'on ſépare par le ſigne d'égalité, =, pour indiquer que ces deux quantités ſont égales l'une à l'autre. On eſt obligé ſouvent de faire ſubir bien des transformations à ces deux membres, afin d'en déduire la valeur de la quantité inconnue; mais ces transformations cependant doivent toutes ſe fonder ſur ce que deux quantités égales reſtent égales, ſoit qu'on leur ajoute ou qu'on en retranche des quantités égales, ſoit qu'on les multiplie ou qu'on les diviſe par un même

nombre, ſoit qu'on les éleve toutes deux à la même puiſſance, ou qu'on en extraie les racines d'un même degré, ſoit enfin que l'on prenne les logarithmes de ces quantités, comme nous l'avons déjà pratiqué dans la ſection précédente.

572.

Les équations qu'on réſout le plus facilement, ſont celles où l'inconnue ne paſſe pas la premiere puiſſance après qu'on a mis les termes de l'équation en ordre, & on les appelle *équations du premier degré.* Mais lorſqu'ayant réduit & ordonné une équation, on y rencontre le quarré ou la ſeconde puiſſance de l'inconnue, on a une *équation du ſecond degré*, qui eſt déjà plus difficile à réſoudre. Enſuite viennent les *équations du troiſieme degré*, qui renferment le cube de l'inconnue, & ainſi de ſuite. Nous traiterons de toutes dans cette ſection.

CHAPITRE II.

De la résolution des Equations du premier degré.

573.

LORSQUE le nombre cherché ou inconnu est indiqué par la lettre x, & que l'équation qu'on a obtenue est telle que l'un de ses membres renferme simplement cet x, & l'autre purement un nombre connu, comme, par exemp. $x=25$, la valeur cherchée de x est toute trouvée. C'est donc à parvenir à une telle forme qu'il faut toujours faire ses efforts, quelque compliquée que soit l'équation qu'on a trouvée d'abord. Nous donnerons dans la suite les regles qui rendent ces réductions plus faciles.

574.

Commençons par les cas les plus simples, & supposons d'abord qu'on soit parvenu à

l'équation $x+9=16$, on voit sur le champ que $x=7$. Et en général si on a trouvé $x+a=b$, où a & b signifient des nombres quelconques, mais connus, on n'a qu'à soustraire a de l'un & de l'autre membre, & on obtient l'équation $x=b-a$, qui indique la valeur de x.

575.

Si l'équation trouvée est $x-a=b$, on ajoutera des deux côtés a, & on aura la valeur cherchée de $x=b+a$.

On procédera de même, si la premiere équation a cette forme, $x-a=aa+1$; car on aura sur le champ $x=aa+a+1$.

Cette autre équation, $x-8a=20-6a$, donne $x=20-6a+8a$, ou $x=20+2a$.

Et celle-ci, $x+6a=20+3a$, donne $x=20+3a-6a$, ou $x=20-3a$.

576.

Si l'équation primitive a cette forme, $x-a+b=c$, on peut commencer par ajouter de part & d'autre a, on aura $x+b=c+a$;

& en soustrayant ensuite b des deux côtés, on trouvera $x=c+a-b$. Mais on peut aussi ajouter d'abord $+a-b$ de part & d'autre; on obtient par-là sur le champ $x=c+a-b$.

Ainsi dans les exemples suivans

Si $x-2a+3b=0$, on a $x=2a-3b$.

Si $x-3a+2b=25+a+2b$, on a $x=25+4a$.

Si $x-9+6a=25+2a$, on a $x=34-4a$.

577.

Quand l'équation trouvée a la forme $ax=b$, on divise seulement les deux membres par a, & on a $x=\frac{b}{a}$. Mais si l'équation est de la forme $ax+b-c=d$, il faudra d'abord faire disparoître les termes qui accompagnent ax, en ajoutant de part & d'autre $-b+c$; & après cela, en divisant par a la nouvelle équation $ax=d-b+c$, on aura $x=\frac{d-b+c}{a}$.

On auroit trouvé la même chose en soustrayant $+b-c$ de l'équation donnée; on

auroit eu pareillement $ax=d-b+c$, & $x=\frac{d-b+c}{a}$. En conséquence de cela

Si $2x+5=17$, on a $2x=12$, & $x=6$.

Si $3x-8=7$, on a $3x=15$, & $x=5$.

Si $4x-5-3a=15+9a$, on a $4x=20+12a$, & par conséquent $x=5+3a$.

578.

Quand la premiere équation aura la forme $\frac{x}{a}=b$, on multipliera des deux côtés par a, pour avoir $x=ab$.

Mais si l'on a $\frac{x}{a}+b-c=d$, il faudra d'abord faire $\frac{x}{a}=d-b+c$, après quoi on obtiendra $x=(d-b+c)a=ad-ab+ac$.

Soit $\frac{1}{2}x-3=4$, on a $\frac{1}{2}x=7$, & $x=14$.

Soit $\frac{1}{3}x-1+2a=3+a$, on aura $\frac{1}{3}x=4-a$, & $x=12-3a$.

Soit $\frac{x}{a-1}-1=a$, on aura $\frac{x}{a-1}=a+1$, & $x=aa-1$.

579.

Quand on est parvenu à une équation, comme $\frac{ax}{b}=c$, on multiplie d'abord par

b, afin d'avoir $ax=bc$, & divisant ensuite par a, on trouve $x=\frac{bc}{a}$.

Que si $\frac{ax}{b}-c=d$, on commenceroit par donner à l'équation cette forme $\frac{ax}{b}=d+c$, après quoi on parviendroit à la valeur de $ax=bd+bc$, & à celle de $x=\frac{bd+bc}{a}$.

Supposons $\frac{2}{3}x-4=1$, nous aurons $\frac{2}{3}x=5$, & $2x=15$; donc $x=\frac{15}{2}$ ou $=7\frac{1}{2}$.

Si $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=5$, nous avons $\frac{3}{4}x=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$; donc $3x=18$, & $x=6$.

580.

Considérons à présent le cas, qui peut arriver fréquemment, où deux ou plusieurs termes contiennent la lettre x, soit dans un seul membre de l'équation, soit dans tous les deux.

Si ces termes sont tous du même côté, c'est-à-dire dans un seul membre, comme dans l'équation $x+\frac{1}{2}x+5=11$, on a $x+\frac{1}{2}x=6$, & $3x=12$, & enfin $x=4$.

Soit

Soit $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=44$, & qu'on demande la valeur de x: si on multiplie d'abord par 3, on a $4x+\frac{3}{2}x=132$; multipliant ensuite par 2, on a $11x=264$; donc $x=24$. On auroit pu procéder plus briévement, en commençant par réduire les trois termes qui renferment x, au seul terme $\frac{11}{6}x$; & divisant ensuite par 11 l'équation $\frac{11}{6}x=44$, on auroit eu $\frac{1}{6}x=4$, donc $x=24$.

Soit $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x=1$, on aura, en réduisant, $\frac{5}{12}x=1$, & $x=2\frac{2}{5}$.

Soit, plus généralement, $ax-bx+cx=d$, c'est comme si on avoit $(a-b+c)x=d$, d'où l'on tire $x=\frac{d}{a-b+c}$.

581.

Lorsqu'il se trouve des termes renfermant x dans l'un & l'autre membre de l'équation, on commencera par faire disparoître ces termes du côté où cela est plus facile, c'est-à-dire où il y en a le moins.

Si on a, par exemple, l'équation $3x+2=x+10$, il faudra soustraire d'abord x des deux côtés, on aura $2x+2=10$; donc $2x=8$, & $x=4$.

Qu'on ait $x+4=20-x$, il est clair que $2x+4=20$; & par conséquent $2x=16$, & $x=8$.

Soit $x+8=32-3x$, on aura $4x+8=32$; ensuite $4x=24$, & $x=6$.

Soit $15-x=20-2x$, on aura $15+x=20$, & $x=5$.

Soit $1+x=5-\frac{1}{2}x$, on aura $1+\frac{3}{2}x=5$; après cela $\frac{3}{2}x=4$; $3x=8$; enfin $x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

Si $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x$, on ajoutera $\frac{1}{3}x$, cela donne $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}x$; soustrayant $\frac{1}{3}$, il reste $\frac{1}{12}x=\frac{1}{6}$; & multipliant par 12, on obtient $x=2$.

Si $1\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x$, on ajoute $\frac{2}{3}x$, cela donne $1\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{7}{6}x$. Soustrayant $\frac{1}{4}$, on a $\frac{7}{6}x=1\frac{1}{4}$, d'où l'on tire $x=1\frac{1}{14}=\frac{15}{14}$, en multipliant par 6, & en divisant par 7.

582.

Si on est parvenu à une équation où le nombre inconnu x est un dénominateur, il faut faire disparoître la fraction, en multipliant toute l'équation par ce dénominateur.

Supposons qu'on ait trouvé $\frac{100}{x}-8=12$, on ajoutera d'abord 8, & on aura $\frac{100}{x}=20$; multipliant ensuite par x, on a $100=20x$; & divisant par 20, on trouve $x=5$.

Soit $\frac{5x+3}{x-1}=7$.

Si on multiplie par $x-1$, on a $5x+3=7x-7$.

Soustrayant $5x$, il reste $3=2x-7$.

Ajoutant 7, il vient $2x=10$. Donc $x=5$.

583.

Quelquefois aussi on rencontre des signes radicaux, & l'équation ne laisse pas d'appartenir au premier degré. Par exemple, on cherche un nombre x au-dessous de 100, & tel que la racine quarrée de $100-x$ devienne égale à 8, ou $\sqrt{(100-x)}=8$,

on prendra des deux côtés le quarré $100 - x = 64$, & en ajoutant x on aura $100 = 64 + x$, d'où l'on tire $x = 100 - 64 = 36$.

On pourroit aussi, puisque $100 - x = 64$, soustraire 100 de l'un & de l'autre membre; on auroit $-x = -36$, & en multipliant par -1, $x = 36$.

584.

Quelquefois enfin le nombre inconnu x se trouve dans l'exposant, nous en avons vu des exemples plus haut, & il faut alors avoir recours aux logarithmes.

Ainsi, quand on a $2^x = 512$, on prend des deux côtés les logarithmes; on a $x\,L.2 = L.512$; & en divisant par L. 2, on trouve $x = \frac{L.512}{L.2}$. Les tables donneront donc

$$x = \frac{2,7092700}{0,3010300} = \frac{270927}{30103} \text{ ou } x = 9.$$

Soit $5.3^{2x} - 100 = 305$, on ajoutera 100; cela fait $5.3^{2x} = 405$; divisant par 5, on a $3^{2x} = 81$; prenant les logarithmes $2x\,L.3 = L.81$, & divisant par $2L.3$, on a $x = \frac{L.81}{2L.3}$ ou $x = \frac{L.81}{L.9}$; donc $x = \frac{1,9084850}{0,9542425} = \frac{19084850}{9542425} = 2$.

CHAPITRE III.

De la solution de quelques questions relatives au Chapitre précédent.

585.

PREMIERE QUESTION. Partager 7 en deux parties, telles que la plus grande surpasse de 3 la plus petite.

Soit la plus grande partie $= x$, la plus petite sera $= 7 - x$; il faut donc que $x = 7 - x + 3$, ou $= 10 - x$; ajoutant x, on a $2x = 10$; & divisant par 2, le résultat est $x = 5$.

Réponse. La plus grande partie est 5, & la plus petite est 2.

Seconde question. On propose de partager a en deux parties, de façon que la plus grande surpasse de b la plus petite.

Soit la plus grande partie $= x$, l'autre sera $a - x$; ainsi $x = a - x + b$; ajoutant

x, on a $2x = a + b$; & divifant par 2, $x = \frac{a+b}{2}$.

Autre folution. Soit la plus grande partie $= x$; comme elle eft plus grande de b que la plus petite, il eft clair que celle-ci eft de b plus petite que l'autre, & $= x - b$. Or ces deux parties, prifes enfemble, doivent faire a; il faut donc que $2x - b = a$; ajoutant b, on a $2x = a + b$; donc $x = \frac{a+b}{2}$, c'eft la valeur de la plus grande partie, & celle de la plus petite fera $\frac{a+b}{2} - b$ ou $\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2}$, ou $\frac{a-b}{2}$.

586.

Troifieme queftion. Un pere qui a trois fils, leur laiffe 1600 écus. Le teftament porte que l'aîné aura 200 écus de plus que le puîné, & que celui-ci aura 100 écus de plus que le cadet. On demande quelle fera la portion de chacun?

Soit la portion du troifieme fils $= x$; celle du fecond fera $= x + 100$, & celle du premier $= x + 300$. Or on fait que ces trois

portions font enfemble 1600 écus. On a donc $3x + 400 = 1600$

$$3x = 1200$$

& $x = 400$.

Réponfe. La part du cadet eft 400 écus, celle du puîné eft 500 écus, & celle de l'aîné eft 700 écus.

587.

Quatrieme queftion. Un pere laiffe quatre fils & 8600 liv.; fuivant le teftament la part de l'aîné doit être double de celle du fecond, moins 100 liv. le fecond doit recevoir trois fois autant que le troifieme, moins 200 liv. & le troifieme doit recevoir quatre fois autant que le quatrieme, moins 300 l. On demande quelles font les portions de ces quatre fils? Nommons x la portion du cadet; celle du troifieme fils fera $= 4x - 300$; celle du fecond $= 12x - 1100$, & celle de l'aîné $= 24x - 2300$. La fomme de ces quatre parts doit faire 8600 liv. On a donc l'équation $41x - 3700 = 8600$, ou $41x = 12300$, & $x = 300$.

Réponse. Il revient au cadet 300 livres, au troisieme fils 900 livres, au second 2500 livres, & à l'aîné 4600 livres.

588.

Cinquieme question. Un homme laisse 11000 écus à partager entre sa veuve, deux fils & trois filles. Il veut que la mere reçoive deux fois la portion d'un fils, & qu'un fils reçoive deux fois autant qu'une fille. On demande combien il revient à ces personnes séparément ?

Supposons la portion d'une fille $= x$, celle d'un fils est par conséquent $= 2x$, & celle de la veuve $= 4x$; tout l'héritage est donc $3x + 4x + 4x$; ainsi $11x = 11000$, & $x = 1000$.

Réponse. Une fille tire 1000 écus,
ainsi toutes les trois reçoivent 3000 écus.
Un fils tire 2000 écus,
ainsi les deux fils reçoivent 4000
La mere reçoit — — — — 4000
somme 11000 écus.

589.

Sixieme question. Un pere veut par son testament, que ses trois fils partagent son bien de la maniere suivante : l'aîné reçoit 1000 écus de moins que la moitié de tout l'héritage ; le second reçoit 800 écus de moins que le tiers de tout le bien ; & le troisieme reçoit 600 écus de moins que le quart du bien. On demande à quelle somme se monte l'héritage entier, & quelle est la part de chaque héritier ?

Exprimons l'héritage par x:
la part du premier fils est $\frac{1}{2}x - 1000$
celle du second $\frac{1}{3}x - 800$
celle du troisieme $\frac{1}{4}x - 600$.

Ainsi les trois fils ensemble tirent $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$, & cette somme doit être égale à x; on a donc l'équation $\frac{13}{12}x - 2400 = x$.

Soustrayant x, il reste $\frac{1}{12}x - 2400 = 0$.

Ajoutant 2400, on a $\frac{1}{12}x=2400$. Multipliant enfin par 12, le produit eſt x égalant 28800.

Réponſe. L'héritage eſt de 28800 écus, &

l'aîné des fils reçoit	13400 écus.
le puîné — — — —	8800
le cadet — — — —	6600
tous trois enſemble	28800 écus.

590.

Septieme queſtion. Un pere laiſſe quatre fils, qui partagent ſon bien de la maniere qui ſuit:

Le premier prend la moitié de l'héritage, moins 3000 livres.

Le ſecond prend le tiers, moins 1000 l.

Le troiſieme prend exactement le quart du bien.

Le quatrieme prend 600 livres, & la cinquieme partie du bien.

De combien étoit l'héritage, & combien chaque fils a-t-il reçu?

Soit l'héritage total $=x$:

l'aîné des fils aura	$\frac{1}{2}x-3000$
le puîné — — —	$\frac{1}{3}x-1000$
le troiſieme — —	$\frac{1}{4}x$
le cadet — — —	$\frac{1}{5}x+600$.

Tous les quatre auront reçu $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x-3400$, ce qu'il faut égaler à x, d'où réſulte l'équation $\frac{77}{60}x-3400=x$;

ſouſtrayant x, on a $\frac{17}{60}x-3400=0$;

ajoutant 3400, on a $\frac{17}{60}x=3400$;

diviſant par 17, on a $\frac{1}{60}x=200$;

multipliant par 60, on a $x=12000$.

Réponſe. L'héritage étoit de 12000 liv.

le premier fils en a pris	3000
le ſecond — — — —	3000
le troiſieme — — —	3000
le quatrieme — — —	3000.

591.

Huitieme queſtion. Trouver un nombre tel que, ſi on y ajoute ſa moitié, la ſomme

surpasse 60 d'autant que le nombre lui-même est au-dessous de 65.

Soit ce nombre $=x$, il faut que $x+\frac{1}{2}x-60=65-x$, c'est-à-dire $\frac{3}{2}x-60=65-x$;

ajoutant x, on a $\frac{5}{2}x-60=65$;
ajoutant 60, on a $\frac{5}{2}x=125$;
divisant par 5, on a $\frac{1}{2}x=25$;
multipliant par 2, on a $x=50$.

Réponse. Le nombre cherché est 50.

592.

Neuvieme question. Partager 32 en deux parties telles que, si je divise la moindre par 6, & la plus grande par 5, les deux quotiens pris ensemble fassent 6.

Soit la plus petite des deux parties cherchées $=x$; la plus grande sera $=32-x$; la premiere, divisée par 6, donne $\frac{x}{6}$; la seconde, divisée par 5, donne $\frac{32-x}{5}$; or il faut que $\frac{x}{6}+\frac{32-x}{5}=6$. Ainsi multipliant par 5, on a $\frac{5}{6}x+32-x=30$, ou $-\frac{1}{6}x+32=30$.

ajoutant $\frac{1}{6}x$, il vient $32=30+\frac{1}{6}x$;
soustrayant 30, il reste $2=\frac{1}{6}x$;
multipliant par 6, on a $x=12$.

Réponse. Les deux parties sont: la plus petite $=12$, la plus grande $=20$.

593.

Dixieme question. Trouver un nombre tel que, si je le multiplie par 5, le produit soit autant au-dessous de 40, que le nombre lui-même est au-dessous de 12. Je nommerai ce nombre x, il est au-dessous de 12 de $12-x$; prenant le nombre x cinq fois, j'ai $5x$, ce qui est moindre que 40 de $40-5x$, & cette quantité doit être égale à $12-x$.

J'ai donc $40-5x=12-x$;
ajoutant $5x$, j'ai $40=12+4x$;
soustrayant 12, j'ai $28=4x$;
divisant par 4, j'ai $x=7$, nombre cherché.

594.

Onzieme question. Partager 25 en deux parties, telles que la plus grande contienne 49 fois la plus petite.

Soit cette derniere $= x$, la plus grande sera $= 25 - x$. Celle-ci divisée par celle-là doit donner le quotient 49; on a donc $\frac{25 - x}{x} = 49$.

Multipliant par x, on a $25 - x = 49x$;
ajoutant x, — — — $25 = 50x$;
divisant par 50, — — $x = \frac{1}{2}$.

Réponse. La plus petite des deux parties cherchées est $\frac{1}{2}$, & la plus grande est $24\frac{1}{2}$; divisant celle-ci par $\frac{1}{2}$, ou multipliant par 2, on trouve 49.

595.

Douzieme question. Partager 48 en neuf parties, de façon que l'une soit toujours de $\frac{1}{2}$ plus grande que la précédente.

Soit la premiere & la plus petite partie $= x$, la seconde sera $= x + \frac{1}{2}$, la troisieme $= x + 1$, &c.

Or ces parties formant une progression arithmétique, dont le premier terme $= x$, le neuvieme & dernier terme sera $= x + 4$. Ajoutant ces deux termes ensemble, on a $2x + 4$; multipliant cette quantité par le nombre des termes, ou par 9, on a $18x + 36$; & divisant ce produit par 2, on obtient la somme de toutes les neuf parties $= 9x + 18$, & qui doit équivaloir à 48. On a donc $9x + 18 = 48$;

soustrayant 18, il reste $9x = 30$;
& divisant par 9 on a $x = 3\frac{1}{3}$.

Réponse. La premiere partie est $3\frac{1}{3}$, & les neuf parties se suivent dans l'ordre que voici :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3\frac{1}{3}$	$+3\frac{5}{6}$	$+4\frac{1}{3}$	$+4\frac{5}{6}$	$+5\frac{1}{3}$	$+5\frac{5}{6}$	$+6\frac{1}{3}$	$+6\frac{5}{6}$	$+7\frac{1}{3}$.

Toutes ensemble font 48.

596.

Treizieme question. Trouver une progression arithmétique, dont le premier terme $= 5$, le dernier $= 10$, & la somme $= 60$.

Nous ne connoiſſons ici ni la différence ni le nombre des termes, mais nous ſavons que le premier & le dernier terme nous ſuffiroient pour exprimer la ſomme de la progreſſion, ſi ſeulement le nombre des termes étoit donné. Nous ſuppoſerons donc ce nombre $=x$, & la ſomme de la progreſſion s'exprimera par $\frac{15x}{2}$; or nous ſavons d'ailleurs que cette ſomme eſt 60; ainſi

$$\frac{15x}{2}=60;\ \frac{1}{2}x=4,\ \&\ x=8.$$

Maintenant, puiſque le nombre des termes eſt 8, ſi nous ſuppoſons la différence $=z$, il ne s'agit plus que de chercher le huitieme terme dans cette ſuppoſition, & de le faire $=10$. Le ſecond terme eſt $5+z$; le troiſieme eſt $5+2z$, & le huitieme eſt $5+7z$, ainſi

$$5+7z=10$$
$$7z=5$$
$$\&\ z=\frac{5}{7}.$$

Réponſe. La différence de la progreſſion eſt $\frac{5}{7}$, & le nombre des termes eſt 8, & par conſéquent la progreſſion eſt

$$\overset{1}{5}+\overset{2}{5\tfrac{5}{7}}+\overset{3}{6\tfrac{3}{7}}+\overset{4}{7\tfrac{1}{7}}+\overset{5}{7\tfrac{6}{7}}+\overset{6}{8\tfrac{4}{7}}+\overset{7}{9\tfrac{2}{7}}+\overset{8}{10},$$

dont la ſomme $=60$.

597.

Quatorzieme queſtion. Je cherche un nombre tel, que ſi du double de ce nombre je ſouſtrais 1, & que je double le reſte, qu'enſuite je ſouſtraie 2, & que je diviſe le reſte par 4, le nombre réſultant de ces opérations ſoit de 1 plus petit que le nombre cherché.

Je ſuppoſerai ce nombre $=x$; le double eſt $2x$; ſouſtrayant 1, il reſte $2x-1$; doublant ceci, j'ai $4x-2$; ſouſtrayant 2, il me reſte $4x-4$; diviſant par 4, il me vient $x-1$; & c'eſt ce qui doit être d'une unité plus petit que x; ainſi

$$x-1=x-1.$$

Mais voilà ce qu'on nomme une *équation identique;* elle indique que x n'eſt pas du tout déterminé, & qu'on peut prendre à ſa place un nombre quelconque à volonté.

598.

Quinzieme question. J'ai acheté quelques aunes de drap à raiſon de 7 écus pour 5 aunes, j'ai revendu de ce drap à raiſon de 11 écus pour 7 aunes, & j'ai gagné 100 écus ſur le tout: on demande combien il y avoit de drap?

Suppoſons qu'il y en ait eu x aunes; il faudra voir d'abord combien l'emplette a coûté; cela ſe trouve par la regle de trois ſuivante:

Cinq aunes coûtent 7 écus; que coûtent x aunes? *Réponſe*, $\frac{7}{5}x$ écus.

Voilà ma dépenſe. Voyons à préſent quelle eſt ma recette; il faudra faire la regle de trois qui ſuit: Sept aunes me valent 11 écus, combien me rapportent x aunes? *Rép.* $\frac{11}{7}x$ écus.

Cette recette doit ſurpaſſer de 100 écus la dépenſe; on a donc cette équation:

$\frac{11}{7}x = \frac{7}{5}x + 100$;

ſouſtrayant $\frac{7}{5}x$, il reſte $\frac{6}{35}x = 100$;

donc $6x = 3500$, & $x = 583\frac{1}{3}$.

Réponſe. Il y avoit $583\frac{1}{3}$ aunes, qui ont été achetées pour $816\frac{2}{3}$ écus, & revendues enſuite pour $916\frac{2}{3}$ écus, moyennant quoi le profit a été de 100 écus.

599.

Seizieme question. Quelqu'un achete 12 pieces de drap pour 140 écus. Deux ſont blanches, trois ſont noires & ſept ſont bleues. Une piece de drap noir coûte deux écus de plus qu'une piece de drap blanc, & une piece de drap bleu coûte trois écus de plus qu'une noire; on demande le prix de chaque ſorte.

Suppoſez qu'une piece blanche coûte x écus, les deux de cette ſorte coûteront $2x$. De plus une piece noire coûtant $x+2$, les trois pieces de cette couleur coûteront $3x+6$. Enfin une piece bleue coûte $x+5$; donc les ſept bleues coûtent $7x+35$. Ainſi toutes les douze pieces reviennent enſemble à $12x+41$.

Or le prix réel & connu de ces douze pieces est 140 écus ; on a donc $12x+41 = 140$,

& $12x = 99$;

donc $x = 8\frac{1}{4}$;

ainsi une piece de drap blanc coûte $8\frac{1}{4}$ écus.

drap noir $10\frac{1}{4}$

drap bleu $13\frac{1}{4}$

600.

Dix-septieme question. Un homme qui a acheté des noix muscades, dit que trois noix lui coûtent autant au-delà d'un sou que quatre lui coûtent au-delà de dix liards: on demande le prix de ces noix ?

On nommera x l'argent que trois noix coûtent de plus qu'un sou ou quatre liards, & on dira : trois noix coûtent $x+4$ liards, & quatre coûteront, par la condition du problême, $x+10$ liards. Or le prix de trois noix donne celui de quatre noix encore d'une autre maniere, savoir par la

regle de trois ; on fera $3 : x+4 = 4$. *Réponse*, $\frac{4x+16}{3}$. Ainsi $\frac{4x+16}{3} = x+10$, ou $4x+16 = 3x+30$;

donc $x+16 = 30$,

& $x = 14$.

Réponse. Trois noix coûtent 18 liards, & quatre coûtent 6 sous ; donc chacune coûte 6 liards.

601.

Dix-huitieme question. Quelqu'un a deux gobelets d'argent avec un seul couvercle pour les deux. Le premier gobelet pese 12 onces, & si on y met le couvercle, il pese deux fois plus que l'autre gobelet ; mais si on couvre l'autre gobelet, celui-ci pese trois fois plus que le premier : il s'agit de trouver le poids du second gobelet & celui du couvercle.

Supposons le poids du couvercle $= x$ onces ; le premier gobelet étant couvert pesera $x+12$ onces. Or ce poids étant le double de celui du second gobelet, il faut

que ce gobelet-ci peſe $\frac{1}{2}x+6$. Si on le couvre, il peſera $\frac{3}{2}x+6$, & ce poids doit être le triple de 12, ou du poids du premier gobelet. On aura donc l'équation $\frac{3}{2}x+6=36$, ou $\frac{3}{2}x=30$; donc $\frac{1}{2}x=10$ & $x=20$.

Réponſe. Le couvercle peſe 20 onces, & le ſecond gobelet peſe 16 onces.

602.

Dix-neuvieme queſtion. Un Banquier a deux eſpeces de monnoie; il faut a pieces de la premiere pour faire un écu; il faut b pieces de la ſeconde pour faire la même ſomme. Quelqu'un vient & demande c pieces pour un écu; combien le Banquier lui donnera-t-il de pieces de chaque eſpece pour le ſatisfaire?

Suppoſons que le Banquier donne x pieces de la premiere eſpece; il eſt clair qu'il donnera $c-x$ pieces de l'autre eſpece. Or les x pieces de la premiere valent $\frac{x}{a}$ écu

par la proportion $a:1=x:\frac{x}{a}$; & les $c-x$ pieces de la ſeconde eſpece valent $\frac{c-x}{b}$ écu, parce qu'on a $b:1=c-x:\frac{c-x}{b}$. Il faut donc que $\frac{x}{a}+\frac{c-x}{b}=1$, ou $\frac{bx}{a}+c-x=b$, ou $bx+ac-ax=ab$, ou bien $bx-ax=ab-ac$; d'où l'on tire $x=\frac{ab-ac}{b-a}$, ou $x=\frac{a(b-c)}{b-a}$. Par conſéquent $c-x=\frac{bc-ab}{b-a}=\frac{b(c-a)}{b-a}$.

Réponſe. Le Banquier donnera $\frac{a(b-c)}{b-a}$ pieces de la premiere eſpece, & $\frac{b(c-a)}{b-a}$ pieces de la ſeconde eſpece.

Remarque. Ces deux nombres ſe trouvent facilement par la regle de trois, lorſqu'il s'agit de faire une application de nos réſultats. On dira, pour trouver le premier: $b-a:b-c=a:\frac{ab-ac}{b-a}$. Le ſecond nombre ſe détermine en faiſant: $b-a:c-a=b:\frac{bc-ab}{b-a}$.

Il faut remarquer auſſi que a eſt plus petit que b, & que c eſt pareillement plus petit que b, mais cependant plus grand que a, ainſi que la nature de la choſe le demande.

603.

Vingtieme question. Un Banquier a deux sortes de monnoie: dix pieces de l'une font un écu, & il faut 20 pieces de l'autre pour faire un écu. Or quelqu'un demande à changer un écu contre dix-sept pieces de monnoie; combien recevra-t-il donc de pieces de chaque sorte?

Nous avons ici $a=10$, $b=20$, & $c=17$; ce qui fournit les regles de trois suivantes:

I. $10:3=10:3$, ainsi 3 pieces de la premiere sorte.

II. $10:7=20:14$, & 14 pieces de la seconde sorte.

604.

Vingt-unieme question. Un pere laisse à sa mort quelques enfans, avec un bien qu'ils partagent de la maniere suivante:

Le premier reçoit cent écus & la dixieme partie du reste.

Le second tire deux cents écus & la dixieme partie de ce qui reste.

Le troisieme prend trois cents écus & la dixieme partie de ce qui reste.

Le quatrieme prend quatre cents écus & la dixieme partie de ce qui reste, & ainsi de suite.

Et il se trouve à la fin, que le bien a été partagé également entre tous les enfans. On demande maintenant de combien étoit l'héritage, combien il y avoit d'enfans, & combien chacun a reçu?

Cette question est d'une nature toute particuliere, & mérite par-là qu'on y fasse attention. Pour la résoudre plus facilement, nous supposerons l'héritage total $=z$ écus; & puisque tous les enfans tirent une même somme, soit cette portion d'un chacun $=x$, moyennant quoi le nombre des enfans s'exprime par $\frac{z}{x}$. Cela posé, voici comment nous nous y prendrons pour résoudre la question proposée.

La Masse ou le bien à partager.	*Ordre des Enfans.*	*Portion de chacun.*	*Différences.*
z	le 1^{r}.	$x = 100 + \frac{z-100}{10}$	
$z - x$	le 2^{d}.	$x = 200 + \frac{z-x-200}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$z - 2x$	le 3^{e}.	$x = 300 + \frac{z-2x-300}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$z - 3x$	le 4^{e}.	$x = 400 + \frac{z-3x-400}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$z - 4x$	le 5^{e}.	$x = 500 + \frac{z-4x-500}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$z - 5x$	le 6^{e}.	$x = 600 + \frac{z-5x-600}{10}$	& ainſi de ſuite.

Nous avons inſéré dans la derniere colonne les différences qu'on obtient en ſouſtrayant chaque portion de la ſuivante. Or toutes les portions étant égales, il faut que chacune de ces différences ſoit $=0$. Et comme il arrive heureuſement qu'une même expreſſion a lieu pour toutes ces différences, il ſuffira d'en égaler une ſeule à zéro, & on aura donc l'équation $100 - \frac{x-100}{10} = 0$. Multipliant par 10, on a $1000 - x - 100 = 0$, ou $900 - x = 0$; par conſéquent $x = 900$.

Nous ſavons donc déjà que la part de chaque enfant étoit 900 écus; ainſi en prenant à préſent à volonté une des équations de la troiſieme colonne, par exemple la premiere, elle devient, en ſubſtituant à x ſa valeur, $900 = 100 + \frac{z-100}{10}$, d'où l'on tire z ſur le champ; car on a $9000 = 1000 + z - 100$, ou $9000 = 900 + z$; donc $z = 8100$; & par conſéquent $\frac{z}{x} = 9$.

Réponſe. Ainſi le nombre des enfans $=9$; l'héritage laiſſé par le pere $=8100$ écus; & la portion de chaque enfant $=900$ écus.

CHAPITRE IV.

De la réſolution de deux ou de pluſieurs Equations du premier degré.

605.

IL arrive ſouvent qu'on eſt obligé de faire entrer dans le calcul deux ou pluſieurs de ces nombres inconnus, repréſentés par les

lettres x, y, z, &c. & si la question est déterminée, on parvient dans ce cas-là à autant d'équations, desquelles il s'agit ensuite de tirer les inconnues. Comme nous ne considérons encore que les équations qui ne contiennent pas des puissances d'une inconnue plus élevées que la premiere, ni des produits de deux ou de plusieurs inconnues, on voit que ces équations auront toutes la forme $az+by+cx=d$.

606.

Commençant donc par deux équations, nous chercherons à en tirer les valeurs de x & y; & pour traiter ce cas d'une maniere générale, soient les deux équations: I. $ax+by=c$, & II. $fx+gy=h$, où a, b, c & f, g, h signifient des nombres connus. Il s'agit donc ici de tirer de ces deux équations, les deux inconnues x & y.

607.

La voie la plus naturelle pour y parvenir se présente aisément à l'esprit; c'est de

déterminer par l'une & l'autre équation la valeur d'une des inconnues, par exemple, de x, & de considérer ensuite l'égalité de ces deux valeurs; car on aura une équation, dans laquelle l'inconnue y se trouvera seule & pourra être déterminée par les regles que nous avons données plus haut. Connoissant donc alors y, on n'aura plus qu'à substituer sa valeur dans une des quantités qui exprimoient x.

608.

D'après cette regle, nous tirons de la premiere équation: $x=\frac{c-by}{a}$, & de la seconde, $x=\frac{h-gy}{f}$; posant ces deux valeurs égales l'une à l'autre, nous avons cette nouvelle équation:

$$\frac{c-by}{a}=\frac{h-gy}{f};$$

multipliant par a, le produit est $c-by=\frac{ah-agy}{f}$;

multipliant par f, le produit est $fc-fby=ah-agy$;

ajoutant agy, on a $fc - fby + agy = ah$; soustrayant fc, il reste $-fby + agy = ah - fc$;

ou bien $(ag - bf)y = ah - fc$;

divisant enfin par $ag - bf$, nous avons $y = \frac{ah-fc}{ag-bf}$.

Pour substituer donc à présent cette valeur de y dans une des deux valeurs que nous avons trouvées pour x, comme dans la premiere $x = \frac{c-by}{a}$, nous aurons d'abord $-by = -\frac{abh+bcf}{ag-bf}$; de-là $c - by = c - \frac{abh+bcf}{ag-bf}$, ou $c - by = \frac{acg-bcf-abh+bcf}{ag-bf} = \frac{acg-abh}{ag-bf}$; & divisant par a, $x = \frac{c-by}{a} = \frac{cg-bh}{ag-bf}$.

609.

Premiere question. Pour éclaircir cette méthode par des exemples, soit proposé de trouver deux nombres, dont la somme soit $=15$, & la différence $=7$.

Nommons x le nombre qui est le plus grand, & y le plus petit. Nous aurons

I.) $x + y = 15$, & II.) $x - y = 7$.

La premiere équation donne $x = 15 - y$, & la seconde donne $x = 7 + y$; de-là résulte la nouvelle équation $15 - y = 7 + y$. Ainsi $15 = 7 + 2y$; $2y = 8$, & $y = 4$; au moyen de quoi on trouve $x = 11$.

Réponse. Le plus petit nombre est 4, & le plus grand est 11.

610.

Seconde question. On peut aussi généraliser la question précédente, en cherchant deux nombres, dont la somme soit $=a$, & la différence $=b$.

Soit le plus grand des deux $=x$, & le plus petit $=y$.

On aura I.) $x + y = a$, & II.) $x - y = b$; la premiere équation donne $x = a - y$; la seconde — — — — — $x = b + y$. Donc $a - y = b + y$; $a = b + 2y$; $2y = a - b$; enfin $y = \frac{a-b}{2}$, & par conséquent $x = a - y = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Réponse. Le plus grand nombre, où x est $= \frac{a+b}{2}$; & le plus petit, où y est $= \frac{a-b}{2}$,

ou, ce qui revient au même, $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, & $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$; & de-là résulte le théoreme suivant: Quand la somme de deux nombres quelconques est a, & que la différence de ces deux nombres est b, le plus grand des deux nombres est égal à la moitié de la somme *plus* la moitié de la différence; & le plus petit des deux nombres est égal à la somme *moins* la moitié de la différence.

611.

On peut aussi résoudre la même question de la maniere qui suit:

Puisque les deux équations sont, $x+y=a$, & $x-y=b$.

Si on les ajoute l'une avec l'autre, on a $2x=a+b$.

Donc $x=\frac{a+b}{2}$.

Ensuite, soustrayant les mêmes équations l'une de l'autre, on a $2y=a-b$; donc $y=\frac{a-b}{2}$.

612.

Troisieme question. Un mulet & un âne portent des charges de quelques quintaux. L'âne se plaint de la sienne & dit au mulet: il ne me manque que de porter encore un quintal de ta charge, pour être plus chargé que toi du double. Le mulet répond: oui, mais si tu me donnois un quintal de la tienne, je serois trois fois plus chargé que toi. On demande combien de quintaux ils portoient chacun?

Supposons la charge du mulet de x quintaux, & celle de l'âne de y quintaux. Si le mulet donne à l'âne un quintal, celui-ci aura $y+1$, & il restera à l'autre $x-1$; & puisque dans ce cas l'âne est deux fois plus chargé que le mulet, on a $y+1=2x-2$.

Mais si l'âne donne un quintal au mulet, celui-ci a $x+1$, & l'âne garde $y-1$; & la charge du premier étant maintenant triple de celle du second, on a $x+1=3y-3$.

Nos deux équations feront par conséquent

I.) $y+1=2x-2$, II.) $x+1=3y-3$.

La premiere donne $x=\frac{y+3}{2}$, & la seconde donne $x=3y-4$; de-là résulte la nouvelle équation $\frac{y+3}{2}=3y-4$, qui donne $y=\frac{11}{5}$, & au moyen de quoi on détermine aussi la valeur de x, qui devient $=2\frac{3}{5}$.

Réponse. Le mulet portoit $2\frac{3}{5}$ quintaux, & l'âne portoit $2\frac{1}{5}$ quintaux.

613.

Lorsqu'on a trois nombres inconnus, & autant d'équations, comme, par exemple, I.) $x+y-z=8$, II.) $x+z-y=9$, III.) $y+z-x=10$, on commencera, comme auparavant par tirer de chacune la valeur de x, & on aura par la I^e.) $x=8+z-y$; par la II^e.) $x=9+y-z$, & par la III^e.) $x=y+z-10$.

Comparant maintenant la premiere de ces valeurs avec la seconde, & après cela

aussi avec la troisieme, on aura les équations suivantes:

I.) $8+z-y=9+y-z$, II.) $8+z-y=y+z-10$.

Or la premiere donne $2z-2y=1$, & la seconde donne $2y=18$, ou $y=9$; si donc on substitue cette valeur de y dans $2z-2y=1$, on a $2z-18=1$, & $2z=19$, ainsi $z=9\frac{1}{2}$; il ne reste donc que x à déterminer, & on le trouve facilement $=8\frac{1}{2}$.

Il est arrivé ici par hasard que la lettre z s'est éliminée dans la derniere équation, & qu'on a trouvé la valeur de y immédiatement. Si ce cas n'avoit pas eu lieu, on auroit eu deux équations entre z & y, qu'il auroit fallu résoudre par la regle précédente.

614.

Qu'on ait trouvé les trois équations suivantes:

I.) $3x+5y-4z=25$, II.) $5x-2y+3z=46$, III.) $3y+5z-x=62$.

Si on tire de chacune la valeur de x; on a

$$\text{I.)}\ x=\frac{25-5y+4z}{3},\ \text{II.)}\ x=\frac{46+2y-3z}{5},$$
$$\text{III.)}\ x=3y+5z-62.$$

Comparant à présent ces trois valeurs entr'elles, & d'abord la troisieme avec la premiere, on a $3y+5z-62=\frac{25-5y+4z}{3}$; multipliant par 3, $9y+15z-186=25-5y+4z$; ainsi $9y+15z=211-5y+4z$, & $14y+11z=211$ par la premiere & la troisieme. Comparant aussi la troisieme avec la seconde, on a $3y+5z-62=\frac{46+2y-3z}{5}$, ou $46+2y-3z=15y+25z-310$, ce qui se réduit à $356=13y+28z$.

On tirera maintenant de ces deux nouvelles équations la valeur de y:

I.) $211=14y+11z$; donc $14y=211-11z$ & $y=\frac{211-11z}{14}$.

II.) $356=13y+28z$; donc $13y=356-28z$, & $y=\frac{356-28z}{13}$.

Ces deux valeurs forment la nouvelle équation $\frac{211-11z}{14}=\frac{356-28z}{13}$, laquelle se change

en celle-ci, $2743-143z=4984-392z$, qui se réduit à $249z=2241$, & d'où l'on tire $z=9$.

Cette valeur étant substituée dans une des deux équations de y & z, on trouve $y=8$, & enfin une substitution semblable dans une des trois valeurs de x, donnera $x=7$.

615.

Si on avoit plus de trois inconnues à déterminer, & autant d'équations à résoudre, on pourroit s'y prendre de la même maniere; mais on se trouveroit engagé le plus souvent dans des calculs fort prolixes.

Il est donc à propos de remarquer que dans chaque cas particulier on ne manque guere de rencontrer des moyens qui en facilitent beaucoup la résolution. Ces moyens sont d'introduire dans le calcul, à côté des inconnues principales, une nouvelle inconnue arbitraire, telle qu'est, par ex. la somme de toutes les autres; & quand on est un

peu verſé dans ces ſortes de calculs, on juge aſſez facilement ce qu'il eſt le plus convenable de faire (*). Nous allons rapporter quelques exemples qui peuvent guider dans l'application de cette méthode.

616.

Quatrieme queſtion. Trois perſonnes jouent enſemble ; dans la premiere partie le premier Joueur perd avec chacun des deux autres autant que chacun d'eux avoit d'argent ſur lui. Dans la ſeconde partie, c'eſt au ſecond Joueur que les deux autres gagnent autant chacun qu'ils ont déjà d'argent. Dans la troiſieme partie enfin, le premier & le ſecond Joueur gagnent au troiſieme autant d'argent chacun, qu'ils en avoient. Ils ceſſent alors de jouer, & il ſe

(*) M. *Cramer* a donné à la fin de ſon *Introduction à l'analyſe des lignes courbes*, une très-belle regle pour déterminer immédiatement, & ſans paſſer par les opérations ordinaires, la valeur des inconnues de ces ſortes d'équations, en quelque nombre que ſoient ces inconnues.

trouve qu'ils ont tous une ſomme égale, ſavoir vingt-quatre louis chacun. On demande avec combien d'argent chacun s'eſt mis au jeu ?

Suppoſons que l'enjeu du premier Joueur ait été de x louis, celui du ſecond, y, & celui du troiſieme, z. Et faiſons outre cela la ſomme de tous les enjeux, ou $x+y+z$, $=s$. Or le premier Joueur perdant dans la premiere partie autant d'argent qu'en ont les deux autres, il perd $s-x$; (car lui-même ayant eu x, les deux autres auront eu $s-x$) ; donc il lui reſtera $2x-s$; le ſecond aura $2y$, & le troiſieme aura $2z$.

Voici donc ce que chacun aura après la premiere partie : le I.) $2x-s$, le II.) $2y$; le III.) $2z$.

Dans la ſeconde partie, le ſecond Joueur qui a maintenant $2y$, perd autant d'argent qu'en ont les deux autres, c'eſt-à-d. $s-2y$; il lui reſte par conſéquent $4y-s$. Quant aux autres, ils auront le double chacun de ce qu'ils avoient ; ainſi après la ſeconde

partie les trois Joueurs ont le I.) $4x-2s$, le II.) $4y-s$, le III.) $4z$.

Dans la troisieme partie, c'est le troisieme Joueur, lequel a actuellement $4z$, qui est le perdant; il perd avec le premier $4x-2s$, & avec le second $4y-s$; par conséquent après cette partie nos trois Joueurs auront:

le I.) $8x-4s$, le II.) $8y-2s$, le III.) $8z-s$.

Or chacun ayant maintenant 24 louis, nous avons trois équations, telles que la premiere donne sur le champ x, la seconde y, & la troisieme z; de plus s est connu & $=72$, puisque les trois Joueurs ensemble ont 72 louis à la fin de la derniere partie; mais c'est à quoi il n'est pas même nécessaire de faire attention d'abord, comme on va le voir. Nous avons

I.) $8x-4s=24$, ou $8x=24+4s$, ou $x=3+\frac{1}{2}s$;

II.) $8y-2s=24$, ou $8y=24+2s$, ou $y=3+\frac{1}{4}s$;

III.) $8z-s=24$, ou $8z=24+s$, ou $z=3+\frac{1}{8}s$.

Ajoutant ces trois valeurs, on a

$$x+y+z=9+\tfrac{7}{8}s.$$

Ainsi, puisque $x+y+z=s$, on a $s=9+\frac{7}{8}s$; donc $\frac{1}{8}s=9$, & $s=72$.

Si on substitue à présent cette valeur de s dans les expressions trouvées pour x, y & z, on trouvera qu'avant que de se mettre au jeu, le premier Joueur avoit 39 louis; le second, 21 louis; & le troisieme, 12 louis.

On voit par cette solution comment, par le secours de la somme des trois inconnues, on surmonte heureusement les obstacles qui se présentent dans la voie ordinaire.

617.

Quoique la question précédente paroisse d'abord assez difficile, nous remarquerons cependant qu'on peut la résoudre, même sans algebre. On n'a qu'à chercher à le faire en rétrogradant. On considérera que puisque les Joueurs, en quittant le jeu,

avoient chacun 24 louis, & que dans la troisieme partie, le premier & le second ont doublé leur argent, ils doivent avoir eu avant cette derniere partie:

le I.)12, le II.)12, & le III.)48.

Dans la seconde partie ce sont le premier & le troisieme qui ont doublé leur argent; donc avant cette partie ils avoient:

le I.)6, le II.)42, le III.)24.

Enfin, dans la premiere partie, le second & le troisieme Joueur ont gagné chacun autant d'argent qu'il en avoit sorti; donc en commençant les trois Joueurs avoient devant eux:

I.)39, II.)21, III.)12.

Ce que nous avons aussi trouvé par la solution précédente.

618.

Cinquieme question. Deux personnes doivent 29 pistoles; elles ont de l'argent toutes les deux, mais pas autant chacune pour pouvoir acquitter seule cette dette com-

mune; le premier Débiteur dit donc au second, si vous me donnez les $\frac{2}{3}$ de votre argent, je payerai seul la dette sur le champ. Le second lui réplique qu'il pourroit aussi acquitter seul la dette, si l'autre lui donnoit les $\frac{3}{4}$ de son argent. On demande combien ils ont l'un & l'autre?

Supposons que le premier ait x pistoles, & que le second ait y pistoles.

Nous aurons d'abord $x+\frac{2}{3}y=29$;
ensuite aussi, $y+\frac{3}{4}x=29$.

La premiere équation donne $x=29-\frac{2}{3}y$, & la seconde donne $x=\frac{116-4y}{3}$; ainsi $29-\frac{2}{3}y=\frac{116-4y}{3}$. On tire de cette équation $y=14\frac{1}{2}$; donc $x=19\frac{1}{3}$.

Réponse. Le premier Débiteur a $19\frac{1}{3}$ pistoles, & le second a $14\frac{1}{2}$ pistoles.

619.

Sixieme question. Trois freres ont acheté une vigne pour cent louis. Le cadet dit

qu'il pourroit la payer seul, si le second lui donnoit la moitié de l'argent qu'il a; le second dit que si l'aîné lui donnoit le tiers seulement de son argent, il payeroit la vigne seul; enfin l'aîné ne demande que le quart de l'argent du cadet, pour payer seul la vigne. Combien chacun avoit-il d'argent? Que le premier ait eu x louis; le second, y louis; le troisieme, z louis; on aura les trois équations suivantes:

I.) $x+\frac{1}{2}y=100$. II.) $y+\frac{1}{3}z=100$. III.) $z+\frac{1}{4}x=100$; deux desquelles seulement donnent la valeur de x, savoir I.) $x=100-\frac{1}{2}y$, III.) $x=400-4z$. Ainsi on a l'équation:

$100-\frac{1}{2}y=400-4z$, ou $4z-\frac{1}{2}y=300$, qu'il faudra combiner avec la seconde, afin de déterminer y & z. Or la seconde équation étoit $y+\frac{1}{3}z=100$; on en tire donc $y=100-\frac{1}{3}z$; & l'équation trouvée en dernier lieu étant $4z-\frac{1}{2}y=300$, on a $y=8z-600$. Par conséquent la derniere équation est:

$100-\frac{1}{3}z=8z-600$; ainsi $8\frac{1}{3}z=700$, ou $\frac{25}{3}z=700$, & $z=84$. Donc $y=100-28=72$, & $x=64$.

Réponse. Le cadet avoit 64 louis, le puîné avoit 72 louis, & l'aîné avoit 84 louis.

620.

Comme dans cet exemple chaque équation ne renferme que deux inconnues, on peut parvenir d'une façon plus commode à la solution cherchée.

La premiere équation donne $y=200-2x$; ainsi y est déterminé en x; & si on substitue cette valeur dans la seconde équation, on a $200-2x+\frac{1}{3}z=100$; donc $\frac{1}{3}z=2x-100$, & $z=6x-300$.

Ainsi z est aussi déterminé en x; & si on introduit cette valeur dans la troisieme équation, on obtient $6x-300+\frac{1}{4}x=100$, où x se trouve seul & qu'on réduit à $25x-1600=0$, d'où l'on tire $x=64$. Par conséquent $y=200-128=72$, & $z=384-300=84$.

621.

On peut suivre le même procédé, lorsqu'on a un plus grand nombre d'équations. Supposons, par exemple, qu'on ait d'une maniere générale: I.) $u+\frac{x}{a}=n$, II.) $x+\frac{y}{b}=n$, III.) $y+\frac{z}{c}=n$, IV.) $z+\frac{u}{d}=n$; ou, en chassant les fractions: I.) $au+x=an$, II.) $bx+y=bn$, III.) $cy+z=cn$, IV.) $dz+u=dn$.

Ici la premiere équation donne d'abord $x=an-au$, & cette valeur étant substituée dans la seconde, on a $abn-abu+y=bn$; ainsi $y=bn-abn+abu$; la substitution de cette valeur dans la troisieme équation donne $bcn-abcn+abcu+z=cn$; donc $z=cn-bcn+abcn-abcu$; substituant enfin ceci dans la quatrieme équation, on a $cdn-bcdn+abcdn-abcdu+u=dn$. Ainsi $dn-cdn+bcdn-abcdn=-abcdu+u$, ou bien $(abcd-1)u=abcdn-bcdn+cdn-dn$; d'où l'on tire $u=\frac{abcdn-bcdn+cdn-dn}{abcd-1}=n\frac{(abcd-bcd+cd-d)}{abcd-1}$.

Par conséquent on aura

$$x=\frac{abcdn-acdn+adn-an}{abcd-1}=n.\frac{(abcd-acd+ad-a)}{abcd-1}.$$

$$y=\frac{abcdn-abdn+abn-bn}{abcd-1}=n.\frac{(abcd-abd+ab-b)}{abcd-1}.$$

$$z=\frac{abcdn-abcn+bcn-cn}{abcd-1}=n.\frac{(abcd-abc+bc-c)}{abcd-1}.$$

$$u=\frac{abcdn-bcdn+cdn-dn}{abcd-1}=n.\frac{(abcd-bcd+cd-d)}{abcd-1}.$$

622.

Septieme question. Un Capitaine a trois compagnies: l'une est de Suisses; l'autre est de Suabes, la troisieme est de Saxons. Il veut donner un assaut avec une partie de ces troupes, & il promet une récompense de 901 écus sur le pied suivant:

Que chaque Soldat de la compagnie qui montera à l'assaut, recevra 1 écu, & que le reste de l'argent sera distribué également aux deux autres compagnies.

Or il se trouve que si les Suisses donnent l'assaut, chaque Soldat des autres compagnies reçoit un demi-écu; que si les Suabes vont à l'assaut, chacun des autres reçoit $\frac{1}{3}$ écu; enfin, que si les Saxons donnent

l'aſſaut, chacun des autres reçoit $\frac{1}{4}$ écu. On demande de combien d'hommes étoit chaque compagnie ?

Suppoſons le nombre des Suiſſes $=x$, celui des Suabes $=y$, & celui des Saxons $=z$. Et faiſons de plus $x+y+z=s$, parce qu'il eſt facile de voir que c'eſt le moyen d'abréger conſidérablement le calcul. Si donc les Suiſſes donnent l'aſſaut, leur nombre étant $=x$, celui des autres ſera $s-x$; or ceux-là reçoivent 1 écu, & ceux-ci un demi-écu ; ainſi on aura

$$x+\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}x=901.$$

On trouvera de la même maniere que ſi les Suabes donnent l'aſſaut, on a

$$y+\tfrac{1}{3}s-\tfrac{1}{3}y=901.$$

Et enfin que, ſi ce ſont les Saxons qui montent à l'aſſaut, on aura

$$z+\tfrac{1}{4}s-\tfrac{1}{4}z=901.$$

Chacune de ces trois équations ſuffira pour déterminer une des inconnues x, y & z;

car

car la premiere donne $x=1802-s$,
la ſeconde donne $2y=2703-s$,
la troiſieme donne $3z=3604-s$.

Or ſi l'on prend maintenant les valeurs de $6x$, $6y$ & $6z$, & qu'on écrive ces valeurs l'une ſous l'autre, on aura

$$6x=10812-6s,$$
$$6y=8109-3s,$$
$$6z=7208-2s,$$

& ajoutant: $6s=26129-11s$, ou $17s=26129$; ainſi $s=1532$; c'eſt le nombre total des Soldats, au moyen duquel on trouve

$x=1802-1537=265$;
$2y=2703-1537=1166$, ou $y=583$;
$3x=3604-1537=2067$, ou $z=689$.

Réponſe. La compagnie des Suiſſes eſt de 265 hommes ; celle des Suabes, de 583 hommes ; & celle des Saxons, de 689 hommes.

CHAPITRE V.

De la résolution des Equations pures du second degré.

623.

On dit qu'une équation est du second degré, quand elle renferme le quarré ou la seconde puissance de l'inconnue, sans qu'on y trouve des puissances plus élevées de cette inconnue. Une équation qui renfermeroit aussi la troisieme puissance de l'inconnue, appartiendroit déjà aux équations cubiques, & sa résolution demanderoit des regles particulieres.

624.

Il n'y a donc que trois especes de termes dans une équation du second degré. En premier lieu les termes où l'inconnue ne se trouve pas du tout, ou qui ne sont composés que de nombres connus.

En second lieu, les termes dans lesquels on rencontre seulement la premiere puissance de la quantité inconnue.

En troisieme lieu, les termes qui contiennent le quarré de la quantité inconnue.

Ainsi x signifiant une quantité inconnue, & les lettres a, b, c, d, &c. représentant des nombres connus, les termes de la premiere espece seront de la forme a, les termes de la seconde espece auront la forme bx, & les termes de la troisieme espece auront la forme cxx.

625.

On a déjà vu suffisamment que deux ou plusieurs termes d'une même espece peuvent se réunir ensemble, & être considérés comme un seul terme.

Par exemple, on peut considérer comme un seul terme la formule $axx - bxx + cxx$, en la représentant par $(a - b + c)xx$; puisqu'en effet $a - b + c$ est une quantité connue.

Et quand même de tels termes se trouveroient des deux côtés du signe $=$, on a vu comment on doit les porter d'un même côté, & les réduire ensuite à un seul terme. Soit, par exemple, l'équation

$$2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11;$$

on soustrait d'abord $2xx$, & il vient

$$-3x + 4 = 3xx - 8x + 11;$$

ajoutant ensuite $8x$, on obtient

$$5x + 4 = 3xx + 11;$$

soustrayant enfin 11, il reste $3xx = 5x - 7$.

626.

On peut aussi transporter tous les termes d'un même côté du signe $=$, de façon qu'il ne reste que o dans l'autre membre; le principal est de faire attention que quand on transporte des termes d'un côté à l'autre, il faut en changer les signes.

C'est ainsi que l'équation ci-dessus prendra cette forme, $3xx - 5x + 7 = 0$, & c'est aussi pourquoi on peut représenter toute équation du second degré généralement par cette formule,

$$axx \pm bx \pm e = 0,$$

dans laquelle le signe $\pm$ se prononce *plus ou moins*, & indique que de tels termes peuvent être tantôt positifs & tantôt négatifs.

627.

Quelle forme qu'ait primitivement une équation du second degré, on peut toujours la réduire à cette formule de trois termes: qu'on soit parvenu, par exemple, à l'équation

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h},$$

il faudra, avant toute chose, chasser les fractions: multipliant pour cet effet d'abord par $cx + d$, on a $ax + b = \frac{cexx+cfx+edx+fd}{gx+h}$, ensuite par $gx + h$, on a

$$agxx + bgx + ahx + bh = cexx + cfx + edx + fd,$$

ce qui est une équation du second degré, & qu'on réduit aux trois termes suivans, que nous transposerons en les rangeant de la maniere qui est le plus en usage:

$$o = agxx + bgx + bh,$$
$$- cexx + ahx - fd,$$
$$- cfx,$$
$$- edx.$$

On peut repréſenter auſſi cette équation de la maniere ſuivante, qui eſt même plus claire :

$$o = (ag - ce)xx + (bg + ah - cf - ed)x + bh - fd.$$

628.

Ces équations du ſecond degré, où toutes les trois eſpeces de termes ſe trouvent, ſe nomment *completes*, & leur réſolution eſt auſſi ſujette à plus de difficultés ; c'eſt pourquoi nous commencerons par conſidérer celles où un de ces termes manque.

Or ſi c'étoit le terme xx qui ne ſe trouvât pas dans l'équation, elle ne ſeroit pas du ſecond degré, mais elle appartiendroit à celles dont nous avons traité ; que ſi c'étoit le terme qui ne contient que des nombres connus, qui manquât, l'équation auroit cette forme, $axx \pm bx = o$, laquelle

étant diviſible par x, ſe réduit à $ax \pm b = o$, qui eſt pareillement une équation du premier degré, & n'appartient pas ici.

629.

Mais lorſque c'eſt le terme moyen, lequel contient la premiere puiſſance de x, qui manque, l'équation revêt cette forme, $axx \pm c = o$, ou $axx = \mp c$; le ſigne de c pouvant être ſoit poſitif, ſoit négatif.

Nous appellerons une telle équation, une équation du ſecond degré *pure*, par la raiſon que ſa réſolution ne ſouffre aucune difficulté. En effet, on n'a qu'à diviſer par a, on obtient $xx = \frac{c}{a}$; & prenant de part & d'autre la racine quarrée, on trouve $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$; au moyen de quoi l'équation eſt réſolue.

630.

Mais nous avons à préſent trois cas à conſidérer ici. Le premier, quand $\frac{c}{a}$ eſt un nombre quarré, dont on puiſſe par conſé-

quent aſſigner réellement la racine, on obtient dans ce cas pour la valeur de x un nombre rationnel, lequel peut être ou entier ou rompu. Par exemple, l'équation $xx=144$, donne $x=12$; & celle-ci, $xx=\frac{9}{16}$, donne $x=\frac{3}{4}$.

Le ſecond cas a lieu, quand $\frac{c}{a}$ n'eſt pas un quarré, dans lequel cas par conſéquent il faut ſe contenter du ſigne $\sqrt{}$. Si, par exemple, $xx=12$, on a $x=\sqrt{12}$, dont la valeur peut ſe déterminer par approximation, comme nous l'avons fait voir plus haut.

Le troiſieme cas enfin eſt celui où $\frac{c}{a}$ devient un nombre négatif; alors la valeur de x eſt tout-à-fait impoſſible & imaginaire, & ce réſultat prouve que la queſtion qui a conduit à une telle équation, eſt impoſſible d'elle-même.

631.

Nous obſerverons encore, avant que d'aller plus loin, que toutes les fois qu'il

eſt queſtion d'extraire la racine quarrée d'un nombre, cette racine a toujours deux valeurs, dont l'une eſt poſitive & l'autre négative. Nous avons déjà fait remarquer cela plus haut. Qu'on ait l'équation $xx=49$, la valeur de x ne ſera pas ſeulement $+7$; mais auſſi -7, ce qu'on indique par $x=\pm 7$. Ainſi toutes ces queſtions admettent une ſolution double; mais on remarquera cependant que dans pluſieurs cas, dans ceux, par exemple, où il s'agit d'un certain nombre d'hommes, l'on comprend bien que la valeur négative ne ſauroit avoir lieu.

632.

Dans le cas précédent même, où c'eſt la quantité connue qui manque, les équations, $axx=bx$, ne laiſſent pas d'admettre deux valeurs de x, quoiqu'on n'en trouve qu'une ſeule, ſi l'on diviſe par x. Car ſi l'on a, par exemple, l'équation $xx=3x$, où il s'agit d'aſſigner pour x une valeur telle, que xx devienne égal à $3x$, cela ſe fait

en suppofant $x=3$, valeur qu'on trouve en divifant l'équation par x; mais outre cette valeur il en eft encore une autre qui fatisfait également, c'eft $x=0$; car alors $xx=0$, & $3x=0$. Toutes les équations du fecond degré en général admettent deux réfolutions, tandis qu'une feule folution peut avoir lieu pour les équations du premier degré.

Nous allons maintenant éclaircir par quelques exemples ce que nous avons dit fur les équations du fecond degré pures.

633.

Premiere queftion. On cherche un nombre dont la moitié, multipliée par le tiers, faffe 24?

Soit ce nombre $=x$: il faut que $\frac{1}{2}x$, multiplié par $\frac{1}{3}x$, donne 24; on aura donc l'équation $\frac{1}{6}xx=24$.

Multipliant par 6, on a $xx=144$; & l'extraction de la racine donne $x=\pm 12$.

On met $\pm$; car fi $x=+12$, on a $\frac{1}{2}x=6$, & $\frac{1}{3}x=4$, & le produit de ces deux nombres eft 24; & fi $x=-12$, on a $\frac{1}{2}x=-6$, & $\frac{1}{3}x=-4$, dont le produit eft également 24.

634.

Seconde queftion. On cherche un nombre tel, qu'en y ajoutant 5, & en en retranchant 5, le produit de la fomme par la différence foit $=96$.

Soit ce nombre x, il faudra que $x+5$, multiplié par $x-5$, donne 96; d'où réfulte l'équation $xx-25=96$.

Ajoutant 25, on a $xx=121$; & extrayant la racine, il vient $x=11$. Ainfi $x+5=16$, & $x-5=6$; or en effet $6.16=96$.

635.

Troifieme queftion. On cherche un nombre tel, qu'en l'ajoutant à 10, & en le retranchant de 10, la fomme multipliée par le refte ou par la différence, donne 51.

Que x ſoit ce nombre; il faut que $10+x$, multiplié par $10-x$, faſſe 51, & qu'ainſi $100-xx=51$. Ajoutant xx, & ſouſtrayant 51, on a $xx=49$, dont la racine quarrée donne $x=7$.

636.

Quatrieme queſtion. Trois Joueurs qui ont fait une partie, ſe retirent; le premier avec autant de fois 7 écus, que le ſecond a de fois trois écus; & le ſecond avec autant de fois 17 écus, que le troiſieme a de fois 5 écus; & ſi on multiplie l'argent du premier par l'argent du ſecond, & l'argent du ſecond par l'argent du troiſieme, & enfin l'argent du troiſieme par l'argent du premier, la ſomme de ces trois produits eſt $3830\frac{2}{3}$. Combien d'argent ont-ils chacun?

Suppoſons que le premier Joueur ait x écus; & puiſqu'il a autant de fois 7 écus, que le ſecond a de fois 3 écus, cela ſignifie que ſon argent eſt à celui du ſecond, en raiſon de $7:3$.

On fera donc $7:3=x$, à l'argent du ſecond Joueur, qui eſt donc $\frac{3}{7}x$.

De plus, comme l'argent du ſecond Joueur eſt à celui du troiſieme en raiſon de $17:5$, on dira $17:5=\frac{3}{7}x$ à l'argent du troiſieme Joueur, ou à $\frac{15}{119}x$.

Multipliant à préſent x, ou l'argent du premier Joueur, par $\frac{3}{7}x$, l'argent du ſecond, on a le produit $\frac{3}{7}xx$.

Après cela, $\frac{3}{7}x$, l'argent du ſecond, multiplié par l'argent du troiſieme, ou par $\frac{15}{119}x$, donne $\frac{45}{833}xx$. Enfin l'argent du troiſieme, ou $\frac{15}{119}x$, multiplié par x, ou l'argent du premier, donne $\frac{15}{119}xx$. La ſomme de ces trois produits eſt $\frac{3}{7}xx+\frac{45}{833}xx+\frac{15}{119}xx$; & en réduiſant au même dénominateur, on la trouve $=\frac{507}{833}xx$, ce qui doit équivaloir au nombre $3830\frac{2}{3}$.

On a donc $\frac{507}{833}xx=3830\frac{2}{3}$.

Ainſi $\frac{1521}{833}xx=11492$, & $1521xx$ étant égal à 9572836, diviſant par 1521, on

a $xx = \frac{9572836}{1521}$; & en prenant la racine, on trouve $x = \frac{3094}{39}$. Cette fraction est encore réductible à de moindres termes, en divisant par 13; ainsi $x = \frac{238}{3} = 79\frac{1}{3}$; & on conclut de-là que $\frac{3}{7}x = 34$, & que $\frac{15}{119}x = 10$.

Réponse. Le premier Joueur a $79\frac{1}{3}$ écus, le second a 34 écus, & le troisieme se retire avec 10 écus.

Remarque. Ce calcul peut se faire encore d'une maniere plus facile; savoir, en prenant les facteurs des nombres qui s'y présentent, & en faisant attention principalement aux quarrés de ces facteurs.

On voit que $507 = 3.169$, & que 169 est le quarré de 13; ensuite, que $833 = 7.119$, & que $119 = 7.17$. Or on a $\frac{3.169}{17.49}xx = 3830\frac{2}{3}$, & si on multiplie par 3, on a $\frac{9.169}{17.49}xx = 11492$. Qu'on résolve aussi ce nombre en ses facteurs; on voit d'abord que le premier est 4, c'est-à-dire, que $11492 = 4.2873$; de plus 2873 est divisible par

17, de sorte que $2873 = 17.169$. Par conséquent notre équation aura la forme suivante: $\frac{9.169}{17.49} = 4.17.169$, laquelle, divisée par 169, se réduit à $\frac{9}{17.49}xx = 4.17$; multipliant de plus par 17.49, & divisant par 9, on a $xx = \frac{4.289.49}{9}$, où tous les facteurs sont des quarrés; d'où il suit qu'on a, sans autre calcul, la racine $x = \frac{2.17.7}{3} = \frac{238}{3}$, comme ci-devant.

637.

Cinquieme question. Quelques Négocians établissent un Facteur à Archangel. Chacun d'eux contribue pour le commerce qu'ils ont en vue, dix fois autant d'écus qu'ils sont d'Associés. Le profit du Facteur est fixé à deux fois autant d'écus qu'il y a d'Associés pour 100 écus. Et si l'on multiplie la $\frac{1}{100}$ partie de son gain total par $2\frac{2}{9}$, on trouve le nombre des Associés. On demande quel est ce nombre?

Soit ce nombre $= x$; & puisque chaque

Associé a fourni $10x$, le capital entier est $= 10xx$. Or avec chaque centaine d'écus le Facteur gagne $2x$, son profit sera donc $\frac{1}{5}x^3$ avec le capital $10xx$. La $\frac{1}{100}$ partie de ce gain est $\frac{1}{500}x^3$; multipliant par $2\frac{2}{9}$, ou par $\frac{20}{9}$, on a $\frac{20}{4500}x^3$, ou $\frac{1}{225}x^3$, & c'est ce qui doit être égal au nombre des Associés x.

On a donc l'équation $\frac{1}{225}x^3 = x$, ou $x^3 = 225x$; elle paroît d'abord être du troisieme degré; mais comme on peut diviser par x, elle se réduit à l'équation du second degré $xx = 225$, d'où l'on tire $x = 15$.

Réponse. Il y a quinze Associés, & chacun a contribué 150 écus.

CHAPITRE

CHAPITRE VI.

De la résolution des Equations mixtes du second degré.

638.

On dit d'une équation du second degré, qu'elle est *mixte* ou complette, lorsqu'on y rencontre trois especes de termes, savoir celle qui contient le quarré de la quantité inconnue, comme axx; celle où l'inconnue se trouve seulement élevée à la premiere puissance, comme bx; enfin l'espece de termes qui n'est composée que de quantités connues. Et puisqu'on peut réunir deux ou plusieurs termes d'une même espece en un seul, & qu'on peut porter tous les termes d'un même côté du signe $=$, la forme de l'équation mixte du second degré sera celle-ci :

$$axx \mp bx \mp c = 0.$$

Nous montrerons dans ce Chapitre com-

ment on doit tirer la valeur de x de ces ſortes d'équations ; on verra qu'il y a deux routes pour y parvenir.

639.

Une équation de l'eſpece dont il s'agit, peut ſe réduire, par le moyen de la diviſion, à une forme telle, que le premier terme ne contienne purement que le quarré xx de l'inconnue x. On laiſſera le ſecond terme du même côté où eſt x, & le terme connu on le portera de l'autre côté du ſigne $=$. Notre équation prendra de cette maniere la forme $xx \pm px = \pm q$, où p & q ſignifient des nombres connus quelconques, poſitifs ou négatifs ; & tout ſe réduit à préſent à déterminer la vraie valeur de x. Nous commencerons par remarquer que ſi $xx + px$ étoit un quarré effectif, la réſolution n'auroit aucune difficulté, parce qu'il ne s'agiroit que de prendre des deux côtés la racine quarrée.

640.

Mais il eſt clair que $xx + px$ ne ſauroit être un quarré, puiſque nous avons vu plus haut que ſi une racine eſt de deux termes, par exemple $x + n$, ſon quarré contient toujours trois termes, ſavoir, outre le quarré de chaque partie, encore le double du produit des deux parties ; c'eſt-à-dire, que le quarré de $x + n$ eſt $xx + 2nx + nn$. Or nous avons déjà d'un côté $xx + px$, nous pouvons donc regarder xx comme le quarré de la premiere partie de la racine, & il faut en ce cas que px repréſente le double du produit de la premiere partie x de la racine par la ſeconde partie ; par conſéquent cette ſeconde partie doit être $\frac{1}{2}p$, & en effet le quarré de $x + \frac{1}{2}p$ ſe trouve être $xx + px + \frac{1}{4}pp$.

641.

Or $xx + px + \frac{1}{4}pp$ étant un quarré réel qui a pour racine $x + \frac{1}{2}p$, ſi nous repre-

nons notre équation $xx+px=q$, nous n'avons qu'à ajouter de part & d'autre $\frac{1}{4}pp$, ce qui nous donne $xx+px+\frac{1}{4}pp=q+\frac{1}{4}pp$, où le premier membre eſt effectivement un quarré, & où l'autre membre ne renferme que des quantités connues. Si donc nous prenons des deux côtés la racine quarrée, nous trouvons $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{(\frac{1}{4}pp+q)}$; & ſouſtrayant $\frac{1}{2}p$, nous obtenons $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$; & comme toute racine quarrée peut être priſe ſoit affirmativement, ſoit négativement, nous aurons pour x deux valeurs exprimées de cette maniere:

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}.$$

642.

Voilà la formule qui contient la regle, d'après laquelle toutes les équations du ſecond degré peuvent être réſolues, & il ſera bon d'en imprimer la ſubſtance dans la mémoire, afin qu'on n'ait pas beſoin de répéter à chaque fois toute l'opération que

nous venons de faire. On pourra toujours ordonner l'équation, de façon que le quarré pur xx ſe trouve d'un ſeul côté, & qu'ainſi l'équation ci-deſſus ait la forme $xx=-px+q$, où l'on voit alors ſur le champ que $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$.

643.

La regle générale que nous déduiſons de-là pour réſoudre l'équation $xx=-px+q$, conſiſte donc en ceci:

Que la quantité inconnue x eſt égale à la moitié du nombre qui multiplie x dans l'autre membre de l'équation, *plus* ou *moins* la racine quarrée du quarré du nombre que l'on vient de dire, & de la quantité connue qui forme le troiſieme terme de l'équation.

C'eſt ainſi que ſi on avoit l'équation $xx=6x+7$, on diroit auſſi-tôt que $x=3\pm\sqrt{9+7}=3\pm4$, d'où réſultent ces deux valeurs de x, I.) $x=7$; II.) $x=-1$. Pareillement l'équation $xx=10x-9$, don-

neroit $x=5\pm\sqrt{25-9}=5\pm 4$, c'eſt-à-dire que les deux valeurs de x ſont 9 & 1.

644.

On ſe mettra encore mieux au fait de cette regle en diſtinguant les cas ſuivans: I.) ſi p eſt un nombre pair; II.) ſi p eſt un nombre impair; & III.) ſi p eſt un nombre rompu.

Soit I.) p un nombre pair, & l'équation telle que, $xx=2px+q$, on aura $x=p\pm\sqrt{pp+q}$.

Soit II.) p un nombre impair, & l'équation $xx=px+q$, on aura $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$; & puiſque $\frac{1}{4}pp+q=\frac{pp+4q}{4}$, on pourra extraire la racine quarrée de ce dénominateur, & écrire $x=\frac{1}{2}p\pm\frac{\sqrt{pp+4q}}{2}=\frac{p\pm\sqrt{pp+4q}}{2}$.

Enfin III.) Soit p une fraction, on pourra réſoudre l'équation de la maniere qui ſuit: Que l'équation en queſtion ſoit celle-ci, $axx=bx+c$, ou $xx=\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}$, on aura, par la regle, $x=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{bb}{4aa}+\frac{c}{a}}$. Or $\frac{bb}{4aa}$

$+\frac{c}{a}=\frac{bb+4ac}{4aa}$, où le dénominateur eſt un quarré; ainſi $x=\frac{b\pm\sqrt{bb+4ac}}{2a}$.

645.

L'autre voie qui conduit à la réſolution des équations du ſecond degré mixtes, eſt de les transformer en des équations pures. Cela ſe fait en ſubſtituant, par exemp. dans l'équation $xx=px+q$, à la place de l'inconnue x, une autre inconnue y, telle que $x=y+\frac{1}{2}p$; au moyen de quoi, quand on a déterminé y, on trouve auſſi-tôt la valeur de x.

Si nous faiſons cette ſubſtitution de $y+\frac{1}{2}p$ à la place de x, nous avons $xx=yy+py+\frac{1}{4}pp$, & $px=py+\frac{1}{2}pp$; par conſéquent notre équation ſe change en celle-ci: $yy+py+\frac{1}{4}pp=py+\frac{1}{2}pp+q$, qui ſe réduit, en ſouſtrayant py, d'abord à $yy+\frac{1}{4}pp=\frac{1}{2}pp+q$; & enſuite, en ſouſtrayant $\frac{1}{4}pp$, à $yy=\frac{1}{4}pp+q$. Ceci eſt une équation du ſecond degré pure, qui donne auſſi-

tôt $y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$. Or puisque $x=y+\frac{1}{2}p$, on a $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp+q}$, ainsi que nous l'avons trouvé ci-dessus. Il ne nous reste donc qu'à éclaircir cette regle par quelques exemples.

646.

Premiere question. J'ai deux nombres; l'un surpasse l'autre de 6, & leur produit est 91. Quels sont ces nombres?

Si le plus petit est x, l'autre est $x+6$, & leur produit $91=xx+6x$.

Soustrayant $6x$, il reste $xx=91-6x$, & la regle donne $x=-3\pm\sqrt{9+91}=-3\pm10$; ainsi $x=7$, & $x=-13$.

Rép. La question admet deux solutions:

Suivant l'une, le plus petit nombre x est $=7$, & le plus grand $x+6=13$.

Suivant l'autre, le plus petit nombre $x=-13$, & le plus grand $x+6=-7$.

647.

Seconde question. Trouver un nombre tel que, si de son quarré je retranche 9, il me vienne un nombre qui soit d'autant d'unités plus grand que 100, que le nombre cherché est plus petit que 23.

Soit le nombre cherché $=x$; je vois que $xx-9$ surpasse 100 de $xx-109$. Et puisque x est au dessous de 23 de $23-x$, j'aurai cette équation: $xx-109=23-x$.

Donc $xx=-x+132$, &, par la regle, $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+132}$, $=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{529}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{23}{2}$. Ainsi $x=11$ & $x=-12$.

Réponse. Lorsqu'on ne demande qu'un nombre positif, ce nombre cherché est 11, dont le quarré moins 9 est 112, & par conséquent de 12 plus grand que 100, de même que 11 est de 12 plus petit que 23.

648.

Troisieme question. Trouver un nombre tel, que si on multiplie sa moitié par son tiers, & qu'au produit on ajoute la moitié du nombre qu'on cherche, le résultat soit 30.

Qu'on suppose ce nombre $=x$, sa moitié, multipliée par son tiers, fera $\frac{1}{6}xx$; il faut donc que $\frac{1}{6}xx+\frac{1}{2}x=30$. Multipliant par 6, on a $xx+3x=180$, ou $xx=-3x+180$, ce qui donne $x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+180}=-\frac{3}{2}\pm\frac{27}{2}$.

Par conséquent x est ou $=12$, ou égal -15.

649.

Quatrieme question. Trouver deux nombres qui soient en proportion double, & tels que si on ajoute leur somme à leur produit, on obtienne 90.

Soit l'un des nombres $=x$, & le plus grand $=2x$, leur produit sera $=2xx$, & si on y ajoute $3x$ ou leur somme, la nouvelle somme doit faire 90. Ainsi $2xx+3x=90$; $2xx=90-3x$; $xx=-\frac{3}{2}x+45$, d'où l'on tire $x=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+45}=-\frac{3}{4}\pm\frac{27}{4}$.

Par conséquent $x=6$, ou $x=-7\frac{1}{2}$.

650.

Cinquieme question. Un Maquignon qui a acheté un cheval pour un certain nombre d'écus, le revend pour 119 écus, & il gagne autant pour cent écus, que le cheval lui a coûté. On demande ce qu'il en avoit payé?

Supposons que le cheval ait coûté x écus; comme le Maquignon y gagne x pour cent, on dira 100 donnent le profit x: que donne x? *Réponse*, $\frac{xx}{100}$. Puis donc qu'il a gagné $\frac{xx}{100}$ & que le cheval lui coûte x écus d'achat, il faut qu'il l'ait vendu pour $x+\frac{xx}{100}$; donc $x+\frac{xx}{100}=119$. Soustrayant x, on a $\frac{xx}{100}=-x+119$; & multipliant par 100, il vient $xx=-100x+11900$. Appliquant maintenant la regle, on trouve $x=-50\pm\sqrt{2500+11900}=-50\pm\sqrt{14400}=-50\pm120$.

Réponse. Le cheval a coûté 70 écus, & puisque le Maquignon a gagné 70 pour

cent en le revendant, le profit doit avoir été de 49 écus. Le cheval doit, par conſéquent, avoir été revendu en effet pour 70 + 49, c'eſt-à-dire pour 119 écus.

651.

Sixieme queſtion. Quelqu'un achete un certain nombre de pieces de drap; il paye pour la premiere 2 écus; pour la ſeconde, 4 écus; pour la troiſieme, 6 écus, & de même toujours 2 écus de plus pour les ſuivantes; & toutes les pieces enſemble lui coûtent 110 écus. Combien y avoit-il de pieces?

Soit le nombre cherché $= x$; & voici le plan de ce que l'Acheteur a payé pour les différentes pieces:

pour la	1,	2,	3,	4,	5	x
il paye	2,	4,	6,	8,	10	$2x$ écus.

Il s'agit par conſéquent de ſommer la progreſſion arithmétique $2+4+6+8+10+\ldots\ldots 2x$, qui eſt de x termes, afin d'en déduire le prix de toutes les pieces de drap

priſes enſemble. La regle que nous avons donnée plus haut pour cette opération, exige qu'on ajoute le dernier terme & le premier. La ſomme eſt $2x+2$; qu'on multiplie cette ſomme par le nombre des termes x, le produit eſt $2xx+2x$; qu'on diviſe enfin par la différence 2, le quotient eſt $xx+x$, c'eſt la ſomme de la progreſſion; ainſi l'on a $xx+x=110$; donc $xx = -x+110$, & $x = -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+110} = -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{441}{4}} = -\frac{1}{2}+\frac{21}{2} = 10$.

Réponſe. Le nombre des pieces de drap achetées eſt 10.

652.

Septieme queſtion. Quelqu'un a acheté pluſieurs pieces de drap pour 180 écus. S'il avoit reçu pour la même ſomme 3 pieces de plus, il auroit eu la piece à meilleur marché de 3 écus. Combien a-t-il acheté de pieces?

Faiſons le nombre cherché $= x$; chaque piece aura coûté réellement $\frac{180}{x}$ écus. Or ſi

l'Acheteur avoit eu $x+3$ pieces pour 180 écus, la piece lui seroit revenue à $\frac{180}{x+3}$ écus; & puisque ce prix est moindre de 3 écus que le prix réel, il faut que nous ayons l'équation,

$$\frac{180}{x+3}=\frac{180}{x}-3.$$

Multipliant par x, nous avons $\frac{180x}{x+3}=180-3x$; divisant par 3, l'on a $\frac{60x}{x+3}=60-x$; multipliant par $x+3$, nous aurons $60x=180+57x-xx$; ajoutant xx, l'on aura $xx+60x=180+57x$; soustrayant $60x$, nous aurons $xx=-3x+180$.

La regle donne par conséquent

$$x=-\tfrac{3}{2}+\sqrt{\tfrac{9}{4}+180}, \text{ ou } x=-\tfrac{3}{2}+\tfrac{27}{2}$$
$$=12.$$

Réponse. On a acheté pour 180 écus 12 pieces de drap à 15 écus la piece, & si on eût obtenu 3 pieces de plus, savoir 15 pieces pour 180 écus, la piece ne seroit revenue qu'à 12 écus, c'est-à-dire, à 3 écus de moins.

653.

Huitieme question. Deux Marchands entrent en société avec un fonds de 100 écus; l'un laisse son argent dans la société pendant trois mois, l'autre laisse le sien pendant deux mois, & chacun retire 99 écus de capital & d'intérêts. On demande quelle part chacun avoit fourni au fonds?

Supposons que le premier Associé ait contribué x écus, l'autre aura contribué $100-x$. Or celui-là retirant 99 écus, son profit est $99-x$, qu'il aura acquis en trois mois avec le capital x; & puisque le second retire pareillement 99 écus, son profit est $x-1$, qu'il aura acquis en deux mois de temps avec le capital $100-x$; & il est clair que le profit de ce second Associé eût été $\frac{3x-3}{2}$, s'il avoit resté trois mois dans la société. Maintenant, comme les profits acquis dans le même temps sont proportionnels aux capitaux, nous avons évidemment $x:99-x=100-x:\frac{3x-3}{2}$.

L'égalité du produit des extrêmes & de celui des moyens, donne l'équation

$$\frac{3xx-3x}{2}=9900-199x+xx;$$

multipliant par 2, nous aurons $3xx-3x=19800-398x+2xx$; soustrayant $2xx$, l'on aura $xx-3x=19800-398x$; ajoutant $3x$, nous aurons $xx=19800-395x$.

Donc par la regle

$$x=-\frac{395}{2}+\sqrt{\frac{156025}{4}+\frac{79200}{4}}=-\frac{395}{2}+\frac{485}{2}$$
$$=\frac{90}{2}=45.$$

Réponse. Le premier Associé a contribué 45 écus, & l'autre 55 écus. Le premier ayant gagné en trois mois 54 écus, auroit gagné en un mois 18 écus; & le second ayant gagné en deux mois 44 écus, auroit gagné en un mois 22 écus: or ces deux profits s'accordent; car, si avec 45 écus on gagne 18 écus dans un mois de temps, on gagnera dans le même temps 22 écus avec 55 écus.

654.

654.

Neuvieme question. Deux Paysannes portent ensemble 100 œufs au marché; l'une en porte plus que l'autre, & cependant le produit est le même pour l'une & pour l'autre. La premiere dit à la seconde: Si j'avois eu tes œufs, j'aurois retiré 15 sous. L'autre lui répond: Si j'avois eu les tiens, j'aurois retiré $6\frac{2}{3}$ sous. Combien d'œufs chacune a-t-elle portés au marché?

Que la premiere ait eu x œufs, la seconde en aura eu $100-x$.

Puis donc que celle-là eût vendu $100-x$ œufs pour 15 sous, on fera la regle de trois suivante:

$$100-x:15=x.... \text{ à } \frac{15x}{100-x} \text{ sous.}$$

De même, puisque la seconde eût vendu x œufs pour $6\frac{2}{3}$ sous, on trouvera combien $100-x$ œufs lui eussent rendu, en disant

$$x:\frac{20}{3}=100-x..... \text{ à } \frac{2000-20x}{3x}.$$

Or les deux Payſannes ont retiré autant d'argent l'une que l'autre ; nous avons par conſéquent l'équation, $\frac{15x}{100-x}=\frac{2000-20x}{3x}$, qui ſe réduit à celle-ci,

$$25xx=200000-4000x;$$

& enfin à celle-ci,

$$xx=-160x+8000;$$

d'où l'on tire

$$x=-80+\sqrt{6400+8000}=-80+120$$
$$=40.$$

Réponſe. La premiere Payſanne avoit 40 œufs, la ſeconde en avoit 60, & chacune a retiré 10 ſous.

655.

Dixieme queſtion. Deux Marchands vendent chacun d'une certaine étoffe ; le ſecond en vend 3 aunes de plus que le premier, & ils tirent enſemble 35 écus. Le premier dit au ſecond : J'aurois retiré de votre étoffe 24 écus ; l'autre répond, & moi j'aurois retiré de la vôtre 12 écus & demi. Combien d'aunes avoient-ils chacun ?

Suppoſons que le premier ait eu x aunes, le ſecond aura eu $x+3$ aunes. Or puiſque le premier eût vendu $x+3$ aunes pour 24 écus, il faut qu'il ait retiré $\frac{24x}{x+3}$ écus de ſes x aunes. Et quant au ſecond, puiſqu'il eût débité x aunes pour $12\frac{1}{2}$ écus, il faut qu'il ait vendu ſes $x+3$ aunes pour $\frac{25x+75}{2x}$; ainſi la ſomme totale qu'ils ont retirée eſt $\frac{24x}{x+3}+\frac{25x+75}{2x}=35$ écus.

Cette équation ſe réduit à $xx=20x-75$, d'où l'on tire $x=10\pm\sqrt{100-75}=10\pm5$.

Réponſe. La queſtion a deux ſolutions : ſuivant la premiere, le premier Marchand avoit 15 aunes, & le ſecond en avoit 18 ; & puiſque celui-là eût vendu 18 aunes pour 24 écus, il aura vendu ſes 15 aunes pour 20 écus ; le ſecond, qui eût vendu 15 aunes pour 12 écus & demi, aura vendu ſes 18 aunes 15 écus ; donc en effet ils ont tiré 35 écus de leur marchandiſe.

Suivant la ſeconde ſolution, le premier

Marchand avoit 5 aunes, & l'autre 8 aunes; ainsi, puisque le premier eût débité 8 aunes pour 24 écus, il aura retiré 15 écus de ses 5 aunes; & le second, puisqu'il eût vendu 5 aunes pour 12 écus & demi, ses 8 aunes lui auront rendu 20 écus. La somme est encore 35 écus.

CHAPITRE VII.

De l'extraction des Racines des nombres polygones.

656.

Nous avons fait voir plus haut comment on doit déterminer les nombres polygones; or ce que nous avons nommé alors *un côté*, s'appelle aussi *une racine*. Si donc on indique la racine par x, on trouvera ce qui suit pour tous les nombres polygones:

le III gone, ou le triangle, est $\frac{xx+x}{2}$,
le IV gone, ou le quarré, xx,
le V gone — — — — — $\frac{3xx-x}{2}$,
le VI gone — — — — — $2xx-x$,
le VII gone — — — — — $\frac{5xx-3x}{2}$,
le VIII gone — — — — — $3xx-2x$,
le IX gone — — — — — $\frac{7xx-5x}{2}$,
le X gone — — — — — $4xx-3x$,
le n gone — — — — — $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$.

657.

Nous avons fait voir suffisamment plus haut, qu'il est facile, par le moyen de ces formules, de trouver, pour une racine donnée quelconque, un nombre polygone cherché. Mais lorsqu'il s'agit de trouver réciproquement le côté, ou la racine d'un polygone dont on connoît le nombre des côtés, l'opération est plus difficile & demande toujours la résolution d'une

équation du second degré. Cela fait que cet article mérite d'être traité ici séparément. Nous le ferons par ordre, en commençant par les nombres triangulaires, & en passant de-là à ceux d'un plus grand nombre d'angles.

658.

Soit donc 91 le nombre triangulaire donné, & duquel on cherche le côté ou la racine.

Si nous faisons cette racine $=x$, il faut que $\frac{xx+x}{2}$ soit $=91$; que $xx+x=182$, & $xx=-x+182$, & par conséquent que $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+182}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{729}{4}}$ $=-\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=13$. Nous en concluons que la racine trigonale cherchée est 13; car le triangle de 13 est 91.

659.

Mais soit en général a le nombre trigonal donné, & qu'on en cherche la racine.

Si on la fait $=x$, on a $\frac{xx+x}{2}=a$, ou $xx+x=2a$; donc $xx=-x+2a$, & par la regle, $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2a}$, ou $x=$ $-\frac{1+\sqrt{8a+1}}{2}$.

Ce résultat donne la regle qui suit: Pour trouver une racine trigonale, il faut multiplier par 8 le nombre trigonal donné, ajouter 1 au produit, extraire la racine de la somme, soustraire 1 de cette racine; & diviser enfin le reste par 2.

660.

On voit par-là que tous les nombres trigonaux ont la propriété, que si on les multiplie par 8, & qu'on ajoute l'unité au produit, la somme est toujours un quarré: la petite table qui suit en donne quelques exemples.

Triangles : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 &c.
8 fois + 1 : 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, 441 &c.

On remarquera que si le nombre donné a ne satisfait pas à cette condition, c'est

signe que ce n'est pas un nombre trigonal réel, ou qu'on ne peut en indiquer une racine rationnelle.

661.

Qu'on cherche, suivant cette regle, la racine trigonale de 210, on aura $a=210$ & $8a+1=1681$, dont la racine quarrée est 41; d'où l'on voit que le nombre 210 est réellement triangulaire, & que sa racine est $=\frac{41-1}{2}=20$. Mais si on donnoit pour trigonal le nombre 4, & qu'on proposât d'en assigner la racine, elle se trouveroit $=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{1}{2}$, & par conséquent irrationnelle; cependant on trouve réellement le triangle de cette racine $\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{1}{2}$, de la maniere qui suit:

Puisque $x=\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, on a $xx=\frac{17-\sqrt{33}}{2}$, & en y ajoutant x, la somme est $xx+x=\frac{16}{2}=8$, & par conséquent le triangle, ou le nombre trigonal $\frac{xx+x}{2}=4$.

662.

Les nombres tétragones étant la même chose que les quarrés, ils ne causent aucune difficulté. Car supposons le nombre tétragone donné $=a$, & sa racine cherchée $=x$, nous aurons $xx=a$, & par conséquent $x=\sqrt{a}$; de sorte que la racine quarrée & la racine tétragone sont la même chose.

663.

Passons donc aux nombres pentagones.

Soit 22 un nombre de cette espece, & x sa racine; il faudra que $\frac{3xx-x}{2}=22$, ou $3xx-x=44$, ou $xx=\frac{1}{3}x+\frac{44}{3}$. On tire de-là $x=\frac{1}{6}+\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{44}{3}}$, ou $x=\frac{1+\sqrt{529}}{6}$ $=\frac{1}{6}+\frac{23}{6}=4$.

Donc 4 est la racine pentagone du nombre 22.

664.

Qu'on propose maintenant la question: étant donné le pentagone a, trouver sa racine.

Soit cette racine $=x$, on aura l'équation $\frac{3xx-x}{2}=a$, ou $3xx-x=2a$, ou $xx=\frac{1}{3}x+\frac{2a}{3}$; au moyen de quoi on trouve $x=\frac{1}{6}+\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{2a}{3}}$, c'est-à-d. $x=\frac{1+\sqrt{24a+1}}{6}$. Lors donc que a est un pentagone effectif, il faut que $24a+1$ soit un quarré.

Que 330 soit, par exemple, le pentagone donné, la racine sera $x=\frac{1+\sqrt{7921}}{6}=\frac{1+89}{6}=15$.

665.

Soit à présent a un nombre hexagone donné, & qu'on en cherche la racine.

Si on la suppose $=x$, on aura $2xx-x=a$, ou $xx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a$; d'où l'on tire $x=\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}a}=\frac{1+\sqrt{8a+1}}{4}$. Ainsi pour que a soit réellement un hexagone, il faut que $8a+1$ devienne un quarré; d'où l'on voit que tous les nombres hexagones sont compris dans les trigonaux; mais il n'en est pas de même des racines.

Soit, par exemple, le nombre hexagone

1225, sa racine sera $x=\frac{1+\sqrt{9801}}{4}=\frac{1+99}{4}=25$.

666.

Supposons a un nombre heptagone, duquel il soit question de trouver le côté ou la racine.

Soit cette racine $=x$, on aura $\frac{5xx-3x}{2}=a$, ou $xx=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}a$, ce qui donne $x=\frac{3}{10}+\sqrt{\frac{9}{100}+\frac{2}{5}a}=\frac{3+\sqrt{40a+9}}{10}$. Tous les nombres heptagones ont par conséquent la propriété, que si on les multiplie par 40 & qu'on ajoute 9 au produit, la somme est toujours un quarré.

Soit, par exemple, le heptagone 2059; on trouvera sa racine $=x=\frac{3+\sqrt{82369}}{10}=\frac{3+287}{10}=29$.

667.

Qu'on entende par a un nombre octogone, duquel on veuille trouver la racine x.

On aura $3xx-2x=a$, ou $xx=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}a$,

d'où résulte $x = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}a} = \frac{1+\sqrt{3a+1}}{3}$. Tous les nombres octogones sont tels, par conséquent, que si on les multiplie par 3 & qu'on ajoute l'unité au produit, la somme est constamment un quarré.

Soit, par exemple, 3816 un octogone; sa racine sera $x = \frac{1+\sqrt{11449}}{3} = \frac{1+107}{3} = 36$.

668.

Soit enfin a un nombre n gone donné, dont il s'agisse de déterminer la racine; on aura cette équation:

$\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2} = a$, ou $(n-2)xx-(n-4)x = 2a$, par conséquent $xx = \frac{(n-4)x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}$; on en tire

$$x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{2a}{n-2}}, \text{ ou}$$

$$x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{8(n-2)a}{4(n-2)^2}}, \text{ ou}$$

$$x = \frac{n-4+\sqrt{8(n-2)a+(n-4)^2}}{2(n-2)}.$$

Cette formule renferme une regle générale pour trouver toutes les racines polygones possibles de nombres donnés.

Par ex. soit donné le nombre XXIV gone 3009; puisque a est ici $=3009$ & $n=24$, on a $n-2=22$ & $n-4=20$; donc la racine ou $x = \frac{20+\sqrt{529584+400}}{44} = \frac{20+728}{44} = 17$.

CHAPITRE VIII.

De l'extraction des Racines quarrées des Binomes.

669.

On nomme en Algebre *un binome* (*), une quantité composée de deux parties qui sont, ou toutes affectées du signe de la racine quarrée, ou dont l'une au moins renferme ce signe.

C'est par cette raison que $3+\sqrt{5}$ est

(*) Quoique dans l'Algebre on nomme en général *binome* une quantité composée de deux termes, M. *Euler* a jugé à propos d'appeller ainsi en particulier les expressions que les Analystes françois désignent par *quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables.*

un binome, & pareillement $\sqrt{8}+\sqrt{3}$; & il eſt indifférent que ces deux termes ſoient joints par le ſigne $+$ ou par le ſigne $-$. C'eſt pourquoi $3-\sqrt{5}$ eſt auſſi bien un binome que $3+\sqrt{5}$.

670.

La principale raiſon pour laquelle ces binomes méritent attention, c'eſt que dans la réſolution des équations du ſecond degré, c'eſt toujours à des quantités de cette forme qu'on parvient, lorſque la réſolution ne peut ſe faire. Par exemple, l'équation $xx=6x-4$ donne $x=3+\sqrt{5}$.

On ſent bien, par conſéquent, que ces formules doivent ſe préſenter fréquemment dans les calculs algébriques; auſſi avons-nous eu ſoin plus haut de faire voir comment on doit les traiter dans les opérations ordinaires de l'Addition, de la Souſtraction, de la Multiplication & de la Diviſion; mais ce n'eſt qu'à préſent que nous ſommes en état de montrer comment on

doit en extraire les racines quarrées, c'eſt-à-dire, autant que cette extraction eſt poſſible; car, quand elle ne l'eſt pas, on ſe contente de donner un nouveau ſigne radical à la quantité. La racine quarrée de $3+\sqrt{2}$ eſt $\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

671.

Il faut obſerver d'abord que les quarrés de tels binomes ſont auſſi des binomes pareils, dans leſquels même un des termes eſt toujours rationnel.

Car, qu'on prenne le quarré de $a+\sqrt{b}$, on trouvera $(aa+b)+2a\sqrt{b}$. Si donc il s'agiſſoit réciproquement de prendre la racine de la formule $(aa+b)+2a\sqrt{b}$, on la trouveroit $=a+\sqrt{b}$, & il eſt, ſans contredit, bien plus facile de s'en faire une idée de cette maniere, que ſi on avoit ſimplement mis encore le ſigne $\sqrt{}$ devant cette formule. De même, ſi on prend le quarré de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, on trouve $(a+b)+2\sqrt{ab}$; donc réciproquement la racine quarrée de

$(a+b)+2\sqrt{ab}$ ſera $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, laquelle ſera pareillement plus facile à ſaiſir, que ſi on ſe contentoit de mettre le ſigne $\sqrt{}$ devant la quantité.

672.

Il s'agit donc principalement de déterminer un caractere qui puiſſe faire reconnoître dans tous les cas ſi une telle racine quarrée a lieu ou non. Nous commencerons, dans ce deſſein, par une formule facile, en cherchant ſi on peut aſſigner, dans le ſens que nous avons dit, la racine quarrée du binome $5+2\sqrt{6}$.

Suppoſons donc que cette racine ſoit $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; le quarré en eſt $(x+y)+2\sqrt{xy}$, & il doit être égal à la formule $5+2\sqrt{6}$. Par conſéquent la partie rationnelle $x+y$ doit être égale à 5, & la partie irrationnelle $2\sqrt{xy}$ doit être égale à $2\sqrt{6}$. Cette derniere égalité donne $\sqrt{xy}=\sqrt{6}$, & $xy=6$. Or puiſque $x+y=5$, on a $y=5-x$, & cette valeur ſubſtituée dans l'équation

tion $xy=6$, produira $5x-xx=6$, ou $xx=5x-6$. Donc $x=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{24}{4}}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$. Ainſi $x=3$ & $y=2$, d'où nous concluons que la racine quarrée de $5+2\sqrt{6}$ eſt $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

673.

Comme nous avons trouvé ici les deux équations, I.) $x+y=5$, & II.) $xy=6$, nous allons indiquer une voie particuliere pour en tirer les valeurs de x & de y.

Puiſque $x+y=5$, qu'on prenne les quarrés $xx+2xy+yy=25$; faiſant attention maintenant que $xx-2xy+yy$ eſt le quarré de $x-y$, qu'on ſouſtraie de $xx+2xy+yy=25$ l'équation $xy=6$ priſe quatre fois, ou $4xy=24$, afin d'avoir $xx-2xy+yy=1$; car prenant à préſent les racines, on a $x-y=1$; & $x+y$ étant $=5$, on trouvera aiſément $x=3$ & $y=2$. Donc la racine quarrée de $5+2\sqrt{6}$ eſt $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

674.

Considérons le binome général $a+\sqrt{b}$, & supposons sa racine quarrée $=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, nous aurons l'équation $(x+y)+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b}$; ainsi $x+y=a$, & $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, ou $4xy=b$; soustrayant ce quarré du quarré de l'équation $x+y=a$, ou de $xx+2xy+yy=aa$, il reste $xx-2xy+yy=aa-b$, dont la racine quarrée est $x-y=\sqrt{aa-b}$. Or $x+y=a$; nous avons donc $x=\frac{a+\sqrt{aa-b}}{2}$ & $y=\frac{a-\sqrt{aa-b}}{2}$, & par conséquent la racine quarrée cherchée de $a+\sqrt{b}$ est $\sqrt{\frac{a+\sqrt{aa-b}}{2}}$ $+\sqrt{\frac{a-\sqrt{aa-b}}{2}}$.

675.

Nous conviendrons que cette formule est plus compliquée que si on eût mis simplement le signe radical $\sqrt{}$ devant le binome donné $a+\sqrt{b}$, & qu'on eût écrit $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. Mais considérons que ladite formule peut se simplifier beaucoup, lorsque les nombres a & b sont tels que $aa-b$ devient un quarré, puisqu'alors le signe $\sqrt{}$ qui est sous le signe $\sqrt{}$ se trouve éliminé. Nous voyons en même temps qu'on ne peut extraire commodément la racine quarrée du binome $a+\sqrt{b}$, que lorsque $aa-b=cc$; car dans ce cas la racine quarrée cherchée est $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$; & que si $aa-b$ n'est pas un quarré parfait, on ne peut indiquer plus convenablement la racine quarrée de $a+\sqrt{b}$, qu'en mettant le signe radical $\sqrt{}$ devant cette quantité.

676.

La condition donc qui est requise pour qu'on puisse exprimer d'une façon plus commode la racine quarrée d'un binome $a+\sqrt{b}$, c'est que $aa-b$ soit un quarré; & si on indique ce quarré par cc, on aura pour la racine quarrée en question $\sqrt{\frac{a+c}{2}}$ $+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$. Il faut remarquer de plus que la racine quarrée de $a-\sqrt{b}$ sera $\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$;

car, en prenant le quarré de cette formule, on trouve $a-2\sqrt{\frac{aa-cc}{4}}$; or puisque $cc=aa-b$, & par conséquent $aa-cc=b$, le même quarré se trouve $=a-2\sqrt{\frac{b}{4}}=a-\frac{2\sqrt{b}}{2}=a-\sqrt{b}$.

677.

Lors donc qu'il s'agit d'extraire la racine quarrée d'un binome tel que $a\pm\sqrt{b}$, la regle est de soustraire du quarré aa de la partie rationnelle le quarré b de la partie irrationnelle, de prendre la racine quarrée du reste, & en nommant cette racine c, d'écrire pour la racine cherchée $\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

678.

Qu'on cherche la racine quarrée de $2+\sqrt{3}$, on a $a=2$ & $b=3$; donc $aa-b=cc=1$, & $c=1$; ainsi la racine cherchée $=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Qu'il s'agisse de trouver la racine quarrée du binome $11+6\sqrt{2}$, on aura $a=11$, & $\sqrt{b}=6\sqrt{2}$; par conséquent $b=36.2=72$, & $aa-b=49$; ce qui donne $c=7$; & il résulte de-là que la racine quarrée de $11+6\sqrt{2}$ est $\sqrt{9}+\sqrt{2}$, ou $3+\sqrt{2}$.

Qu'on cherche la racine quarrée de $11+2\sqrt{30}$: ici $a=11$ & $\sqrt{b}=2\sqrt{30}$; par conséquent $b=4.30=120$, & $aa-b=1$, & $c=1$; donc la racine cherchée $=\sqrt{6}+\sqrt{5}$.

679.

Cette regle a lieu également, lors même que le binome renferme des quantités imaginaires ou impossibles.

Soit proposé, par exemple, le binome $1+4\sqrt{-3}$, on aura $a=1$ & $\sqrt{b}=4\sqrt{-3}$, c'est-à-dire, $b=-48$ & $aa-b=49$. Donc $c=7$, & par conséquent la racine quarrée qu'on cherche $=\sqrt{4}+\sqrt{-3}=2+\sqrt{-3}$.

Autre exemple. Soit donné $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, nous avons $a=-\frac{1}{2}$; $\sqrt{b}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, & $b=\frac{1}{4}.-3=-\frac{3}{4}$. Donc $aa-b=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

$=1$, & $c=1$; & le résultat cherché est $\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{-\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$, ou $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Un autre exemple remarquable est celui où il s'agit de trouver la racine quarrée de $2\sqrt{-1}$. Comme il n'y a point ici de partie rationnelle, on aura $a=0$; or $\sqrt{b}=2\sqrt{-1}$ & $b=-4$, donc $aa-b=4$ & $c=2$; par conséquent la racine quarrée qu'on cherche est $\sqrt{1}+\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}$, & en effet le quarré de cette quantité est $1+2\sqrt{-1}-1=2\sqrt{-1}$.

680.

Supposons encore qu'il se présentât une équation telle que $xx=a\pm\sqrt{b}$, & que $aa-b$ fût $=cc$; on en concluroit la valeur de $x=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$, ce qui peut être d'usage en bien des cas.

Soit, par exemple, $xx=17+12\sqrt{2}$; on aura $x=3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$.

681.

Ce cas a lieu principalement dans la résolution de quelques équations du quatrieme

degré, par exemple, de $x^4=2axx+d$. Car si l'on suppose $xx=y$, on a $x^4=yy$, ce qui réduit l'équation donnée à $yy=2ay+d$, & d'où l'on tire $y=a\pm\sqrt{aa+d}$. On a donc $xx=a\pm\sqrt{aa+d}$, & par conséquent encore une extraction de racine à faire. Or, puisqu'ici $\sqrt{b}=\sqrt{aa+d}$, on aura $b=aa+d$, & $aa-b=-d$. Si donc $-d$ est un quarré comme cc, c'est-à-dire que $d=-cc$, on pourra assigner la racine demandée.

Supposons qu'effectivement $d=-cc$, ou bien que l'équation du quatrieme degré proposée soit $x^4=2axx-cc$, nous trouverons donc $x=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

682.

Nous rendrons plus sensible, par quelques exemples, ce que nous venons de dire.

1°. On cherche deux nombres dont le produit soit 105, & dont les quarrés fassent ensemble 274.

Indiquons ces deux nombres par x & y; nous aurons les deux équations, I.) $xy = 105$, & II.) $xx + yy = 274$.

La premiere donne $y = \frac{105}{x}$, & cette valeur de y étant substituée dans la seconde équation, nous avons $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$.

Donc $x^4 + 105^2 = 274xx$, ou $x^4 = 274xx - 105^2$.

Si nous comparons maintenant cette équation avec celle de l'article précédent, nous avons $2a = 274$, & $-cc = -105^2$; par conséquent $c = 105$, & $a = 137$. Nous trouvons par conséquent

$$x = \sqrt{\frac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137-105}{2}} = 11 \pm 4.$$

Il s'ensuit de-là que x est, ou $= 15$, ou $= 7$. Dans le premier cas $y = 7$, dans le second cas $y = 15$. Donc les deux nombres cherchés sont 15 & 7.

683.

Il sera bon cependant de remarquer que ce calcul peut se faire beaucoup plus facilement d'une autre maniere. Car puisque

$xx + 2xy + yy$ & $xx - 2xy + yy$ sont des quarrés, & que nous connoissons les valeurs de $xx + yy$ & de xy, nous n'avons qu'à prendre le double de cette derniere quantité, l'ajouter à la premiere & l'en soustraire, comme on va voir: $xx + yy = 274$. Si on y ajoute $2xy = 210$, on a $xx + 2xy + yy = 484$, ce qui donne $x + y = 22$.

Soustrayant à présent $2xy$, il reste $xx - 2xy + yy = 64$, d'où l'on tire $x - y = 8$.

Ainsi $2x = 30$ & $2y = 14$, & par conséquent $x = 15$ & $y = 7$.

La question générale qui suit, se résout par la même méthode.

2°. On cherche deux nombres, dont le produit soit $= m$, & la somme des quarrés $= n$.

Si ces nombres sont, l'un $= x$, l'autre $= y$, on a les deux équations suivantes: I.) $xy = m$, II.) $xx + yy = n$. Or $2xy = 2m$ étant ajouté à $xx + yy = n$, on a $xx + 2xy + yy = n + 2m$, & par conséquent $x + y = \sqrt{n + 2m}$.

Mais soustrayant $2xy$, il reste $xx - 2xy + yy = n - 2m$, d'où l'on tire $x - y = \sqrt{n - 2m}$; on aura donc $x = \frac{1}{2}\sqrt{n+2m} + \frac{1}{2}\sqrt{n-2m}$, & $y = \frac{1}{2}\sqrt{n+2m} - \frac{1}{2}\sqrt{n-2m}$.

684.

3°. On cherche deux nombres tels que leur produit $= 35$, & la différence de leurs quarrés $= 24$.

Soit le plus grand des deux nombres $= x$ & le plus petit $= y$, on aura les deux équations $xy = 35$, & $xx - yy = 24$; & les mêmes avantages n'ayant pas lieu ici, on procédera par la voie ordinaire. La premiere équation donne $y = \frac{35}{x}$, &, en substituant cette valeur de y dans la seconde, on a $xx - \frac{1225}{xx} = 24$. Multipliant par xx, on a $x^4 - 1225 = 24xx$, & $x^4 = 24xx + 1225$. Or le second membre de cette équation étant affecté du signe $+$, on ne pourra pas faire usage de la formule donnée ci-dessus, parce que cc étant $= -1225$, c deviendroit imaginaire.

Qu'on fasse donc $xx = z$, on aura $zz = 24z + 1225$, d'où l'on tire $z = 12 \pm \sqrt{144 + 1225}$, ou $z = 12 \pm 37$; par conséquent $xx = 12 \pm 37$, c'est-à-d. ou $= 49$ ou $= -25$.

Si on adopte la premiere valeur, on a $x = 7$ & $y = 5$.

Si on adopte la seconde valeur, on a $x = \sqrt{-25}$ & $y = \frac{35}{\sqrt{-25}} = \sqrt{\frac{1225}{-25}} = \sqrt{-49}$.

685.

Nous terminerons ce Chapitre par la question suivante.

4°. On cherche deux nombres tels qu'il y ait égalité entre leur somme, leur produit & la différence de leurs quarrés.

Soit x le plus grand des deux nombres, & y le plus petit; il faudra que les trois formules qui suivent soient égales entre elles: I.) la somme $x + y$; II.) le produit xy; III.) la différence des quarrés $xx - yy$. Si l'on compare la premiere avec la se-

conde, on a $x+y=xy$, ce qui donnera une valeur de x; car on aura $y=xy-x$ $=x(y-1)$, & $x=\frac{y}{y-1}$. Par conséquent $x+y=\frac{yy}{y-1}$, & $xy=\frac{yy}{y-1}$, c'est-à-dire que la somme est en effet égale au produit; & c'est à quoi doit être égale aussi la différence des quarrés. Or on a $xx-yy$ $=\frac{yy}{yy-2y+1}-yy=\frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$; faisant donc ceci égal à la quantité trouvée $\frac{yy}{y-1}$, on a $\frac{yy}{y-1}$ $=\frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$; divisant par yy, il vient $\frac{1}{y-1}$ $=\frac{-yy+2y}{yy-2y+1}$; multipliant par $(y-1)^2$, on a $y-1=-yy+2y$; par conséquent $yy=y$ $+1$. Cela donne $y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{1}{2}$ $\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$ ou $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, & on aura donc x $=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$.

Pour chasser la quantité sourde du dénominateur, on multipliera les deux termes par $\sqrt{5}+1$, & on obtiendra $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}$ $=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Réponse. Le plus grand des nombres cherchés, ou x, $=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; & le plus petit, y, $=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ainsi leur somme $x+y=2$

$+\sqrt{5}$; leur produit $xy=2+\sqrt{5}$; & puisque $xx=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$, & $yy=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, on a aussi la différence des quarrés $xx-yy=2$ $+\sqrt{5}$.

686.

Comme cette solution étoit assez longue, il sera bon de faire remarquer qu'on peut l'abréger. Qu'on commence par faire la somme $x+y$ égale à la différence des quarrés $xx-yy$, on aura $x+y=xx-yy$; & divisant par $x+y$, à cause de $xx-yy$ $=(x+y)(x-y)$, on trouve $1=x-y$ & $x=y+1$. Par conséquent $x+y=2y$ $+1$, & $xx-yy=2y+1$; de plus le produit xy ou $yy+y$ devant être égal à la même quantité, on a $yy+y=2y+1$, ou $yy=y+1$, ce qui donne, comme ci-dessus, $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

687.

5°. La question précédente nous conduit à considérer encore celle-ci: Trouver deux

nombres tels, qu'il y ait égalité entre leur somme, leur produit & la somme de leurs quarrés.

Nommons x & y les nombres cherchés; il faut qu'il y ait égalité entre I.) $x+y$, II.) xy, & III.) $xx+yy$.

Comparant la premiere & la seconde formule, nous avons $x+y=xy$, d'où nous tirons $x=\frac{y}{y-1}$; par conséquent xy ou $x+y$ $=\frac{yy}{y-1}$. Or la même quantité équivaut à $xx+yy$, ainsi nous avons $\frac{yy}{yy-2y+1}+yy$ $=\frac{yy}{y-1}$. Multipliant par $yy-2y+1$, le produit est $y^4-2y^3+2yy=y^3-yy$, ou $y^4=3y^3-3yy$; & en divisant par yy, nous avons $yy=3y-3$; ce qui donne $y=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-3}=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$; par conséquent $y-1=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, d'où résulte $x=\frac{3+\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$; & en multipliant les deux termes par $1-\sqrt{-3}$, le résultat est $x=\frac{6-2\sqrt{-3}}{4}$ ou $\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$.

Réponse. Donc les deux nombres cherchés sont $x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$, & $y=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, leur somme est $x+y=3$, leur produit $xy=3$;

enfin, puisque $xx=\frac{3-3\sqrt{-3}}{3}$ & $yy=\frac{3+3\sqrt{-3}}{2}$, la somme des quarrés $xx+yy=3$.

688.

On peut abréger considérablement ce calcul par un artifice particulier, qui est applicable aussi dans d'autres cas. Il consiste à exprimer les nombres cherchés par la somme & par la différence de deux lettres, au lieu de les indiquer par des lettres simples.

Qu'on suppose, dans notre derniere question, l'un des nombres cherchés $=p+q$, & l'autre $=p-q$, leur somme sera $2p$, leur produit sera $pp-qq$, & la somme de leurs quarrés sera $=2pp+2qq$, & ces trois quantités doivent être égales entr'elles. Egalant d'abord la premiere à la seconde, on a $2p=pp-qq$, ce qui donne $qq=pp-2p$. Substituant cette valeur de qq dans la troisieme quantité, & comparant le résultat $4pp-4p$ avec la premiere, on a $2p=4pp-4p$, d'où l'on tire $p=\frac{3}{2}$.

Par conſéquent $qq = -\frac{3}{4}$, & $q = \frac{\sqrt{-3}}{2}$; de ſorte que les nombres que nous cherchons ſont $p + q = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, & $p - q = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$, comme nous les avons trouvés ci-deſſus.

CHAPITRE IX.

De la nature des Equations du ſecond degré.

689.

ON a vu ſuffiſamment par ce qui précede, que les équations du ſecond degré ſont réſolubles de deux manieres, & cette propriété mérite à tous égards d'être examinée, parce que la nature des équations d'un degré ſupérieur ne peut que recevoir par-là beaucoup de jour. Nous remonterons donc avec plus d'attention aux cauſes qui font que toute équation du ſecond degré admet une double ſolution; elles renferment indubitablement une propriété eſſentielle de ces équations.

690.

690.

Il eſt vrai que nous avons déjà vu que cette double ſolution provient de ce que la racine quarrée d'un nombre quelconque peut être priſe, ſoit poſitive, ſoit négative; cependant, comme ce principe ne s'appliqueroit pas aiſément à des équations de dimenſions plus hautes, il ſera bon de développer clairement la même propriété encore d'une autre maniere. Nous prendrons pour exemple l'équation du ſecond degré, $xx = 12x - 35$, & nous donnerons une nouvelle raiſon, par laquelle cette équation eſt réſoluble de deux façons, en admettant pour x les deux valeurs 5 & 7 qui lui ſatisfont également.

691.

Il eſt plus convenable pour notre but, de commencer par tranſpoſer les termes de l'équation, de maniere qu'un des membres devienne 0; cette équation prend par

conséquent la forme $xx-12x+35=0$; & il s'agit à présent de trouver un nombre tel que, si on le substitue à x, la formule $xx-12x+35$ se réduise effectivement à rien; il sera question après cela de montrer pourquoi cela peut se faire de deux manieres.

692.

Or le tout consiste ici à faire voir avec clarté, qu'une quantité de la forme $xx-12x+35$ peut être envisagée comme le produit de deux facteurs; ainsi en effet la formule dont nous parlons est composée des deux facteurs $(x-5).(x-7)$. Car puisque cette quantité doit se réduire à 0, il faut aussi que le produit $(x-5).(x-7)=0$; mais un produit, de quelque nombre de facteurs qu'il soit composé, devient $=0$, lors même qu'un seul de ces facteurs se réduit à 0; c'est un principe fondamental auquel il faut faire attention, sur-tout quand il s'agit d'équations de plusieurs degrés.

693.

On comprend donc aisément, que le produit $(x-5).(x-7)$ peut devenir 0 de deux façons : l'une, quand le premier facteur $x-5=0$; l'autre, quand le second facteur $x-7=0$. Dans le premier cas $x=5$, dans l'autre cas $x=7$. La raison est donc très-claire, pourquoi une telle équation $xx-12x+35=0$, admet deux solutions; c'est-à-dire, pourquoi on peut assigner pour x deux valeurs qui satisfont également à l'équation. Cette raison fondamentale consiste en ce que la formule $xx-12x+35$ peut être représentée par le produit de deux facteurs.

694.

Les mêmes circonstances se retrouvent dans toutes les équations du second degré. Car, après avoir porté tous les termes d'un même côté, on ne manque jamais de parvenir à une équation de la forme $xx-ax$

$+b=0$, & cette formule peut toujours être regardée pareillement comme le produit de deux facteurs, que nous représenterons par $(x-p)x-q$, sans nous embarrasser quels nombres sont les valeurs de p & de q. Or ce produit devant être $=0$ par la nature de notre équation, il est clair que cela peut arriver de deux manieres: en premier lieu, lorsque $x=p$; & en second lieu, lorsque $x=q$; & ce sont-là les deux valeurs de x qui satisfont à l'équation.

695.

Voyons maintenant de quelle nature doivent être ces deux facteurs, pour que la multiplication de l'un par l'autre reproduise exactement notre formule $xx-ax+b$. Nous trouvons, en les multipliant réellement, $xx-(p+q)x+pq$; or cette quantité doit être la même chose que $xx-ax+b$, il faut donc évidemment que $p+q=a$, & $pq=b$. Ainsi nous apprenons cette propriété bien remarquable, que dans

toute équation de la forme $xx-ax+b=0$, les deux valeurs de x sont telles que leur somme est égale à a, & leur produit égal à b; d'où il suit que, dès qu'on connoît l'une des valeurs, on trouve aussi l'autre facilement.

696.

Nous venons de considérer le cas où les deux valeurs de x sont positives, & qui exige que le second terme de l'équation ait le signe $-$, & que le troisieme terme ait le signe $+$. Considérons donc aussi les cas dans lesquels soit l'une ou toutes les deux valeurs de x deviennent négatives. Le premier de ces cas a lieu, lorsque les deux facteurs de l'équation donnent un produit de cette forme $(x-p)(x+q)$; car alors les deux valeurs de x sont $x=p$ & $x=-q$; l'équation elle-même devient $xx+(q-p)x-pq=0$; le second terme a le signe $+$, quand q est plus grand que p, & le signe $-$, quand q est plus petit que p; enfin le troisieme terme est toujours négatif.

Le second cas, où les deux valeurs de x sont négatives, a lieu, lorsque les deux facteurs sont $(x+p)(x+q)$; car on a $x=-p$ & $x=-q$; l'équation elle-même devient $xx+(p+q)x+pq=0$, où le second comme le troisieme terme sont affectés du signe $+$.

697.

Les signes du second & du troisieme terme nous font connoître par conséquent la qualité des racines d'une équation quelconque du second degré. Soit l'équation $xx \ldots ax \ldots b=0$: si le second & le troisieme terme ont le signe $+$, les deux valeurs de x sont négatives; si le second terme a le signe $-$, & que le troisieme terme ait $+$, les deux valeurs sont positives; enfin, si le troisieme terme affecte de même le signe $-$, une des valeurs en question est positive. Mais dans tous les cas au reste le second terme contient la somme des deux valeurs, & le troisieme terme contient leur produit.

698.

On trouvera très-facile, après ce qui a été dit, de former des équations du second degré qui renferment deux valeurs données à volonté. On demande, par exemple, une équation telle que l'une des valeurs de x soit 7, & que l'autre soit -3. Qu'on forme d'abord les équations simples $x=7$ & $x=-3$; ensuite de-là celles-ci, $x-7=0$ & $x+3=0$, on aura de cette maniere les facteurs de l'équation cherchée, laquelle devient par conséquent $xx-4x-21=0$. Aussi en appliquant ici la regle donnée plus haut, trouve-t-on les deux valeurs de x supposées; car si $xx=4x+21$, on a $x=2\pm\sqrt{25}=2\pm5$, c'est-à-dire $x=7$, ou $x=-3$.

699.

Il peut arriver aussi que les valeurs de x deviennent égales: qu'on cherche, par exemple, une équation où ces deux valeurs soient $=5$, les deux facteurs seront $(x-5)$

$(x-5)$, & l'équation cherchée fera $xx-10x+25=0$. Dans cette équation x paroît n'avoir qu'une valeur; mais c'eſt que x fe trouve doublement $=5$, comme la ſolution ordinaire le fait voir pareillement; car on a $xx=10x-25$; donc $x=5\pm\sqrt{0}=5\pm 0$, c'eſt-à-dire que x eſt de deux façons $=5$.

700.

Un cas remarquable ſur-tout, & qui arrive quelquefois, c'eſt celui où les deux valeurs de x deviennent imaginaires ou impoſſibles; car il eſt tout-à-fait impoſſible alors d'aſſigner pour x une valeur telle qu'elle ſatisfaſſe à l'équation. Qu'on ſe propoſe, par exemple, de partager le nombre 10 en deux parties, telles que leur produit ſoit 30; ſi on nomme x une de ces parties, l'autre ſera $=10-x$, & leur produit ſera $10x-xx=30$; donc $xx=10x-30$, & $x=5\pm\sqrt{-5}$, ce qui eſt un nombre imaginaire qui apprend que la queſtion eſt impoſſible.

701.

Il eſt donc très-important de trouver un ſigne auquel on puiſſe reconnoître ſur le champ ſi une équation du ſecond degré eſt poſſible, ou ſi elle ne l'eſt pas.

Reprenons l'équation générale $xx-ax+b=0$, nous aurons $xx=ax-b$, & $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-b}$. On voit par-là que ſi b eſt plus grand que $\frac{1}{4}aa$, ou $4b$ plus grand que aa, les deux valeurs de x deviennent toujours imaginaires, vu qu'il s'agiroit d'extraire la racine quarrée d'une quantité négative; & au contraire, que ſi b eſt plus petit que $\frac{1}{4}aa$, ou même plus petit que 0, c'eſt-à-dire que ce ſoit un nombre négatif, les deux valeurs ſeront poſſibles ou réelles. Au reſte, qu'elles ſoient réelles ou qu'elles ſoient imaginaires, il n'en eſt pas moins vrai qu'on pourra toujours les exprimer, & qu'elles ont auſſi toujours la propriété que leur ſomme eſt $=a$, & leur produit $=b$. Dans l'équation $xx-6x+10=0$;

par exemple, la ſomme des deux valeurs de x doit être $=6$, & le produit de ces deux valeurs doit être $=10$; or on trouve, I.) $x=3+\sqrt{-1}$, & II.) $x=3-\sqrt{-1}$, quantités dont la ſomme $=6$, & le produit $=10$.

702.

Le caractere que nous venons de trouver peut s'exprimer d'une maniere encore plus générale, & de façon à pouvoir même être appliqué aux équations de cette forme, $fxx \pm gx + h = 0$; car cette équation donne $xx = \mp \frac{gx}{f} - \frac{h}{f}$, & $x = \mp \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}}$, ou $x = \frac{\mp g \pm \sqrt{gg - 4hf}}{2f}$; d'où l'on infere que les deux valeurs ſont imaginaires, & par conſéquent l'équation impoſſible, quand $4fh$ eſt plus grand que gg; c'eſt-à-dire, lorſque dans l'équation $fxx - gx + h = 0$, le quadruple du produit du premier & du dernier terme ſurpaſſe le quarré du ſecond terme; car ce produit du premier & du dernier terme, pris quatre fois, eſt $4fhxx$, & le

quarré du terme moyen eſt $ggxx$; or ſi $4fhxx$ eſt plus grand que $ggxx$, $4fh$ eſt auſſi plus grand que gg, & dans ce cas l'équation eſt évidemment impoſſible. Dans tous les autres cas l'équation eſt poſſible, & on peut aſſigner deux valeurs réelles pour x; il eſt vrai que ſouvent elles deviennent irrationnelles; mais nous avons vu plus haut que dans ces cas on ne laiſſe pas de pouvoir les connoître en approchant autant qu'on veut; au lieu qu'aucune approximation ne ſauroit avoir lieu pour les expreſſions imaginaires, telles que $\sqrt{-5}$; car 100 eſt auſſi éloigné d'être la valeur de cette racine, que l'eſt 1 ou un autre nombre quelconque.

703.

Nous avons encore à faire remarquer qu'une formule quelconque du ſecond degré, $xx \pm ax \pm b$, eſt toujours néceſſairement réſoluble en deux facteurs, tels que $(x \pm p)(x \pm q)$. Car ſi l'on prenoit trois

facteurs pareils à ceux-là, on parviendroit à une quantité du troisieme degré, & en ne prenant qu'un seul facteur pareil, on ne passeroit pas le premier degré.

C'est donc un point qui est au-dessus de toute contestation, que toute équation du second degré renferme nécessairement deux valeurs de x, & qu'il ne peut y en avoir moins ou davantage.

704.

Nous avons déjà vu que quand on a trouvé les deux facteurs, on connoît aussi les deux valeurs de x, vu que chaque facteur donne une de ces valeurs, quand on le suppose $=0$. L'inverse a lieu pareillement, c'est-à-dire que dès qu'on a trouvé une valeur de x, on connoît aussi un des facteurs de l'équation; car si $x=p$ indique une des valeurs de x dans une équation quelconque du second degré, $x-p$ est un des facteurs de cette équation; c'est-à-dire que tous les termes ayant été portés du

même côté, l'équation est divisible par $x-p$, & qui plus est, le quotient exprime l'autre facteur.

705.

Soit donnée, pour éclaircir mieux ce que nous venons de dire, l'équation $xx+4x-21=0$, de laquelle nous savons que $x=3$ est une des valeurs de x; parce que $3.3+4.3-21=0$; cela nous fait juger que $x-3$ est un des facteurs de cette équation, ou que $xx+4x-21$ est divisible par $x-3$, & en effet la division suivante le fait voir.

$$\begin{array}{r|l} x-3) & xx+4x-21\,(x+7 \\ & \underline{xx-3x} \\ & 7x-21 \\ & \underline{7x-21} \\ & 0. \end{array}$$

Ainsi l'autre facteur est $x+7$, & notre équation se représente par le produit $(x-3)(x+7)=0$; d'où s'ensuivent immédiatement les deux valeurs de x, le premier facteur donnant $x=3$, & l'autre facteur donnant $x=-7$.

CHAPITRE X.

Des Equations pures du troisieme degré.

706.

ON dit d'une équation du troisieme degré, qu'elle est *pure*, lorsque le cube de la quantité inconnue est égal à une quantité connue, sans que ni le quarré de l'inconnue ni l'inconnue même se trouvent dans l'équation.

$x^3 = 125$, ou plus généralement $x^3 = a$, $x^3 = \frac{a}{b}$, sont des équations de ce genre.

707.

Il est clair comment on doit tirer la valeur de x d'une telle équation, vu qu'on n'a besoin que d'extraire des deux côtés la racine cubique. L'équation $x^3 = 125$ donne $x = 5$, l'équation $x^3 = a$ donne $x = \sqrt[3]{a}$, & l'équation $x^3 = \frac{a}{b}$ donne $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, ou x

$= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. Il suffit donc qu'on ait appris à extraire la racine cubique d'un nombre proposé, pour qu'on soit en état de résoudre de semblables équations.

708.

On n'obtient de cette matiere qu'une seule valeur pour x; cependant toute équation du second degré ayant deux valeurs, on est fondé à soupçonner qu'une équation du troisieme degré a pareillement plus d'une valeur; il vaudra donc la peine d'approfondir la chose, & en cas qu'on trouve qu'une telle équation doit avoir plusieurs valeurs pour x, de déterminer ces valeurs.

709.

Considérons, par exemple, l'équation $x^3 = 8$, dans la vue d'en conclure tous les nombres dont le cube est 8. Comme $x = 2$ est sans contredit un tel nombre, il faut, d'après le Chapitre précédent, que la formule $x^3 - 8 = 0$, soit nécessairement

divisible par $x-2$. Faisons donc cette division :

$$\begin{array}{l} x-2)\ x^3-8\ \ (xx+2x+4 \\ \quad x^3-2xx \\ \hline \quad\quad 2xx-8 \\ \quad\quad 2xx-4x \\ \hline \quad\quad\quad 4x-8 \\ \quad\quad\quad 4x-8 \\ \hline \quad\quad\quad\quad 0. \end{array}$$

Il s'ensuit que notre équation $x^3-8=0$ peut se représenter par ces facteurs-ci:

$$(x-2)(xx+2x+4)=0.$$

710.

Or la question est de savoir quel nombre on doit substituer à la place de x, pour que $x^3=8$, ou que $x^3-8=0$; & il est clair qu'on satisfait à cette condition, en supposant $=0$ le produit que nous venons de trouver; mais cela arrive non-seulement quand le premier facteur $x-2=0$, d'où résulte $x=2$, mais aussi quand le second facteur

xx

$xx+2x+4=0$. Qu'on fasse donc $xx+2x+4=0$, on aura $xx=-2x-4$, & de-là $x=-1\pm\sqrt{-3}$.

711.

Outre le cas donc où $x=2$, qui satisfait à l'équation $x^3=8$, nous avons encore pour x deux autres valeurs dont les cubes sont pareillement 8, & qui sont:

I.) $x=-1+\sqrt{-3}$, & II.) $x=-1-\sqrt{-3}$.

On n'en doutera plus, si on prend les cubes effectivement comme nous allons faire :

$$\begin{array}{ll} -1+\sqrt{-3} & \\ -1+\sqrt{-3} & \\ \hline 1-\sqrt{-3} & \\ \quad -\sqrt{-3}-3 & \\ \hline -2-2\sqrt{-3} & \text{quarré} \\ -1+\sqrt{-3} & \\ \hline 2+2\sqrt{-3} & \\ \quad -2\sqrt{-3}+6 & \\ \hline \quad\quad 8 & \text{cube.} \end{array}
\qquad
\begin{array}{l} -1-\sqrt{-3} \\ -1-\sqrt{-3} \\ \hline 1+\sqrt{-3} \\ \quad +\sqrt{-3}-3 \\ \hline -2+2\sqrt{-3} \\ -1-\sqrt{-3} \\ \hline 2-2\sqrt{-3} \\ \quad +2\sqrt{-3}+6 \\ \hline \quad\quad 8. \end{array}$$

Il eſt vrai que ces deux valeurs ſont imaginaires ou impoſſibles ; mais elles méritent cependant qu'on y faſſe attention.

712.

Ce que nous venons de voir a lieu en général pour toute équation cubique, telle que $x^3 = a$; on trouvera toujours outre la valeur $x = \sqrt[3]{a}$, encore deux autres valeurs. Qu'on ſuppoſe, pour abréger, $\sqrt[3]{a} = c$, de ſorte que $a = c^3$, notre équation prendra cette forme, $x^3 - c^3 = 0$, qui ſera diviſible par $x - c$, comme la diviſion effective le fait voir :

$$
\begin{array}{l}
x - c)\, x^3 - c^3 \,(xx + cx + cc \\
\qquad\quad \underline{x^3 - cxx} \\
\qquad\qquad\quad cxx - c^3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{cxx - ccx} \\
\qquad\qquad\qquad\quad ccx - c^3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{ccx - c^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0.
\end{array}
$$

Par conſéquent l'équation en queſtion peut être repréſentée par le produit $(x - c)(xx + cx + cc) = 0$, qui eſt en effet $= 0$, non-ſeulement lorſque $x - c = 0$, ou $x = c$, mais auſſi quand $xx + cx + cc = 0$. Or cette formule contient deux autres valeurs de x; car elle donne $xx = -cx - cc$, & $x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{cc}{4} - cc}$, ou $x = \frac{-c \pm \sqrt{-3cc}}{2}$, c'eſt-à-dire, $x = \frac{-c \pm c\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot c$.

713.

Or comme c avoit été mis à la place de $\sqrt[3]{a}$, nous en inférons que toute équation du troiſieme degré, de la forme $x^3 = a$, fournit trois valeurs pour x exprimées de la maniere ſuivante :

$$\text{I.)}\ x = \sqrt[3]{a},\quad \text{II.)}\ x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a},$$
$$\text{III.)}\ x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a}.$$

On voit par-là que chaque racine cubique a trois différentes valeurs ; mais qu'une ſeule eſt réelle ou poſſible, les deux autres

étant impossibles. Cela est d'autant plus à remarquer, que toute racine quarrée a deux valeurs, & que nous verrons plus bas qu'une racine bi-quarrée a quatre valeurs différentes, qu'une racine cinquieme a cinq valeurs, & ainsi de suite.

Il est vrai que dans les calculs ordinaires on n'emploie que la premiere de ces trois valeurs, parce que les deux autres sont imaginaires; c'est ce que nous confirmerons par quelques exemples.

714.

Premiere question. Trouver un nombre tel que son quarré multiplié par son quart produise 432.

Que x soit ce nombre, il faut que le produit de xx multiplié par $\frac{1}{4}x$ soit égal au nombre 432, c'est-à-dire que $\frac{1}{4}x^3 = 432$, & que $x^3 = 1728$. Qu'on extraie la racine cubique, on aura $x = 12$.

Réponse. Le nombre cherché est 12; car son quarré 144, multiplié par son quart ou par 3, donne 432.

715.

Seconde question. Je cherche un nombre tel, qu'en divisant sa quatrieme puissance par sa moitié, & en ajoutant $14\frac{1}{4}$ au produit, il me vienne 100.

Je nommerai ce nombre x; sa quatrieme puissance sera x^4; divisant par la moitié $\frac{1}{2}x$, j'ai $2x^3$, & il faut qu'en ajoutant $14\frac{1}{4}$, la somme soit 100; j'ai donc $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$; soustrayant $14\frac{1}{4}$, il reste $2x^3 = \frac{343}{4}$; divisant par 2, j'ai $x^3 = \frac{343}{8}$; & prenant la racine cubique, j'obtiens enfin $x = \frac{7}{2}$.

716.

Troisieme question. Quelques Capitaines se trouvent en campagne; chacun commande à trois fois autant de Cavaliers, & à vingt fois autant de Fantassins qu'ils sont de Capitaines. Un Cavalier reçoit chaque mois pour sa paye autant de florins qu'il y a de Capitaines, & chaque Fantassin reçoit

la moitié de cette paye ; la dépense totale par mois est de 13000 florins ; on demande combien il y a de Capitaines ?

Soit x le nombre cherché, chaque Capitaine aura sous lui $3x$ Cavaliers & $20x$ Fantassins. Ainsi le nombre total des Cavaliers est $3xx$, & celui des Fantassins est $20xx$. Or chaque Cavalier recevant par mois x florins, & chaque Fantassin recevant $\frac{1}{2}x$ flor. la paye des Cavaliers, à chaque mois, se monte à $3x^3$, & celle des Fantassins est $10x^3$; ils reçoivent donc tous ensemble $13x^3$ flor. & cette somme doit équivaloir à 13000 florins ; on a donc $13x^3 = 13000$, ou $x^3 = 1000$, & $x = 10$, nombre cherché des Capitaines.

717.

Quatrieme question. Quelques Négocians entrent en société, & chacun contribue cent fois autant qu'il y a d'Associés ; ils envoient un Facteur à Venise pour faire valoir ce capital ; ce Facteur gagne pour cent

sequins deux fois autant de sequins qu'il y a d'Intéressés, & il revient avec 2662 sequins de profit ; on demande le nombre des Associés ?

Si ce nombre est supposé $= x$, chacun des Négocians associés aura fourni $100x$ sequins, & le capital entier aura été de $100xx$ sequins ; or le profit étant de $2x$ pour 100, le capital aura rapporté $2x^3$; ainsi il faut faire $2x^3 = 2662$, ou $x^3 = 1331$; cela donne $x = 11$, & c'est le nombre des Associés.

718.

Cinquieme question. Une Paysanne échange des fromages contre des poules, à raison de deux fromages pour trois poules ; ces poules pondent chacune $\frac{1}{3}$ autant d'œufs qu'il y a de poules ; la Paysanne vend au marché neuf œufs pour autant de sous que chaque poule a pondu d'œufs, & elle tire 72 sous ; on demande combien de fromages elle a échangé ?

Soit ce nombre des fromages $=x$, celui des poules que la Payſanne aura reçues en échange ſera $=\frac{3}{2}x$, & chaque poule pondant $\frac{1}{2}x$ œufs, le nombre des œufs ſera $=\frac{3}{4}xx$. Or neuf œufs ſe vendent pour $\frac{1}{2}x$ ſous, ainſi l'argent que $\frac{3}{4}xx$ œufs produiſent, eſt $\frac{1}{24}x^3$, & il faut que $\frac{1}{24}x^3=72$. Par conſéquent $x^3=24.72=8.3.8.9=8.8.27$, & $x=12$; c'eſt-à-dire que la Payſanne a échangé douze fromages contre dix-huit poules.

CHAPITRE XI.

De la réſolution des Equations complettes du troiſieme degré.

719.

UNE équation du troiſieme degré eſt dite *complette*, lorſqu'elle renferme, outre le cube de l'inconnue, auſſi cette quantité inconnue elle-même, & le quarré de cette

quantité; de ſorte que la formule générale pour toutes ces équations, en portant tous les termes d'un même côté, eſt

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d=0.$$

C'eſt à faire voir comment on doit tirer de telles équations les valeurs de x, qu'on nomme auſſi les *racines* de l'équation, que nous deſtinons ce Chapitre. Nous ſuppoſerons qu'on n'a aucun doute qu'une telle équation n'ait trois racines, après que nous avons fait voir dans le Chapitre précédent que cela eſt vrai à l'égard des équations pures du même degré.

720.

Nous conſidérerons d'abord l'équation $x^3-6xx+11x-6=0$; & de même qu'une équation du ſecond degré peut être regardée comme étant le produit de deux facteurs, on peut repréſenter une équation du troiſieme degré par le produit de trois facteurs qui ſont dans notre cas, $(x-1)(x-2)(x-3)=0$; puiſqu'en les multi-

pliant effectivement on parvient à l'équation donnée; car $(x-1).(x-2)$ donne $xx-3x+2$, & multipliant ceci par $x-3$ on trouve $x^3-6xx+11x-6$, ce qui est en effet la formule prescrite, & qui doit être $=0$. Or cela a lieu par conséquent, quand le produit $(x-1)(x-2)(x-3)$ se réduit à rien; & comme il suffit pour cet effet qu'un seul de ces facteurs soit $=0$, trois différens cas peuvent donner ce résultat, savoir $x-1=0$, ou $x=1$; en second lieu, $x-2=0$, ou $x=2$; & en troisieme lieu, $x-3=0$, ou $x=3$.

On voit sur le champ aussi, que si on substituoit à la place de x un nombre quelconque, autre qu'un des trois ci-dessus, aucun des trois facteurs ne deviendroit $=0$, & par conséquent que le produit ne deviendroit pas 0 non plus; ce qui prouve que notre équation ne peut avoir d'autre racine que ces trois racines-là.

721.

Si l'on pouvoit dans tout autre cas assigner de même les trois facteurs d'une telle équation, on auroit immédiatement ses trois racines. Considérons donc d'une maniere plus générale ces trois facteurs, $x-p$, $x-q$, $x-r$; si nous cherchons leur produit, le premier multiplié par le second donne $xx-(p+q)x+pq$, & ce produit multiplié par $x-r$ fait $x^3-(p+q+r)xx+(pq+pr+qr)x-pqr$.

Or si cette formule doit devenir $=0$, cela peut arriver dans trois cas: le premier est celui où $x-p=0$, ou $x=p$; le second a lieu quand $x-q=0$, ou $x=q$; le troisieme cas est celui de $x-r=0$, ou de $x=r$.

722.

Représentons maintenant la formule trouvée par l'équation $x^3-axx+bx-c=0$; il est clair que pour que ses trois racines soient

I.) $x=p$, II.) $x=q$, III.) $x=r$, il faut 1°. que $a=p+q+r$, 2°. que $b=pq+pr+qr$, & 3°. que $c=pqr$. Ainſi nous apprenons par-là que le ſecond terme contient la ſomme des trois racines, que le troiſieme terme contient la ſomme des produits des racines priſes deux à deux, enfin que le quatrieme terme eſt formé du produit de toutes les trois racines multipliées les unes par les autres.

Cette derniere propriété nous préſente auſſi-tôt une vérité importante, qui eſt qu'une équation du troiſieme degré ne peut certainement avoir d'autres racines rationnelles que des diviſeurs du dernier terme; car puiſque ce terme eſt le produit des trois racines, il faut qu'il ſoit diviſible par chacune d'elles. On voit donc ſur le champ, lorſqu'on veut chercher une racine par le tâtonnement, de quels nombres on doit faire l'eſſai (*).

(*) On verra dans la ſuite, que cette propriété eſt générale pour les équations d'un degré quelconque. Au reſte comme ce tâtonnement exige qu'on connoiſſe tous les diviſeurs du dernier terme de l'équation, on peut avoir recours pour cela aux tables indiquées à l'art. 66.

Si nous conſidérons, pour nous expliquer mieux, l'équation $x^3=x+6$, ou $x^3-x-6=0$, comme cette équation ne peut avoir d'autres racines rationnelles que des nombres qui ſont facteurs du dernier terme 6, nous n'avons beſoin d'eſſayer que les nombres 1, 2, 3, 6, & voici le détail de ces eſſais:

I.) Si $x=1$, on a $1-1-6=-6$.
II.) Si $x=2$, on a $8-2-6=0$.
III.) Si $x=3$, on a $27-3-6=18$.
IV.) Si $x=6$, on a $216-6-6=204$.

Nous voyons par-là que $x=2$ eſt une des racines de l'équation propoſée, & ſachant cela il nous eſt facile de trouver les deux autres; car $x=2$ étant une des racines, $x-2$ eſt un facteur de l'équation, & on n'a donc qu'à chercher l'autre facteur par la voie de la Diviſion, ainſi que nous allons le faire:

$$x-2)\,x^3-x-6\,(xx+2x+3$$
$$\underline{x^3-2xx\qquad}$$
$$2xx-x-6$$
$$\underline{2xx-4x\qquad}$$
$$3x-6$$
$$\underline{3x-6}$$
$$0.$$

Puis donc que notre formule se représente par le produit $(x-2)(xx+2x+3)$, elle deviendra $=0$, non-seulement quand $x-2=0$, mais aussi quand $xx+2x+3=0$. Or ce dernier facteur donne $xx=-2x-3$, & par conséquent $x=-1\pm\sqrt{-2}$. Ce sont donc ici les deux autres racines de notre équation, lesquelles sont, comme on le voit, impossibles ou imaginaires.

723.

La méthode que nous venons d'indiquer, n'est applicable immédiatement que lorsque le premier terme x^3 est multiplié par 1,

& que les autres termes de l'équation ont pour coefficiens des nombres entiers. Quand cette condition n'a pas lieu, il faut commencer par une préparation qui consiste à transformer l'équation en une autre qui ait la condition requise, après quoi on fait l'essai que nous avons dit.

Soit donnée, par exemple, l'équation $x^3-3xx+\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}=0$; comme elle renferme des quarts, qu'on fasse $x=\frac{y}{2}$, on aura $\frac{y^3}{8}-\frac{3yy}{4}+\frac{11y}{8}-\frac{3}{4}=0$, & en multipliant par 8, on obtiendra l'équation $y^3-6yy+11y-6=0$, dont les racines sont, comme nous l'avons vu plus haut, $y=1$, $y=2$, $y=3$; d'où il s'ensuit que dans l'équation proposée on a I.) $x=\frac{1}{2}$, II.) $x=1$, III.) $x=\frac{3}{2}$.

724.

Qu'on ait une équation, dont le premier terme ait pour coefficient un nombre entier autre que 1, & dont le dernier terme

ſoit 1 ; par exemple, $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$; ſi on diviſe par 6, on aura $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$; on pourroit purger cette équation des fractions, par la regle que nous venons de donner, en ſuppoſant $x = \frac{y}{6}$; car on auroit $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$; & en multipliant par 216, il viendroit $y^3 - 11yy + 36y - 36 = 0$. Mais comme il ſeroit trop long de faire l'eſſai avec tous les diviſeurs du nombre 36, remarquons que puiſque le dernier terme de l'équation primitive eſt 1, il vaut mieux ſuppoſer dans cette équation $x = \frac{1}{z}$; car on aura l'équation $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z} - 1 = 0$, qui multipliée par z^3 donne $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$, & en tranſpoſant tous les termes, $z^3 - 6zz + 11z - 6 = 0$. Les racines ſont ici (158) $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$; d'où il ſuit que dans notre équation $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

725.

725.

On aura obſervé dans les articles précédens, que pour que les racines ſoient toutes des nombres poſitifs, il faut que les ſignes *plus* & *moins* ſe ſuivent alternativement ; moyennant quoi l'équation prend cette forme, $x^3 - axx + bx - c = 0$, dans laquelle les ſignes changent autant de fois qu'il y a de racines poſitives. Si toutes les trois racines euſſent été négatives, & qu'on eût multiplié entr'eux les trois facteurs $x+p$, $x+q$, $x+r$, tous les termes auroient eu le ſigne *plus*, & la forme de l'équation auroit été $x^3 + axx + bx + c = 0$, où on voit les mêmes ſignes ſe ſuivre *trois* fois, c'eſt-à-dire, le nombre des racines négatives.

On a donc conclu qu'autant de fois que les ſignes changent, autant l'équation a de racines poſitives, & qu'autant de fois que les mêmes ſignes ſe ſuccedent, autant l'équation a de racines négatives ; & cette

remarque eſt très-importante, parce qu'on ſait par-là ſi c'eſt en *plus* ou en *moins* qu'on doit prendre les diviſeurs du dernier terme, quand on veut faire l'eſſai dont nous avons parlé.

726.

Conſidérons, afin d'éclaircir par un exemple ce que nous venons de dire, l'équation $x^3+xx-34x+56=0$, dans laquelle les ſignes changent deux fois, & où ce n'eſt qu'une fois que le même ſigne revient. Nous concluons que l'équation a deux racines poſitives & une racine négative, & comme ces racines doivent être des diviſeurs du dernier terme 56, il faut qu'elles ſoient compriſes dans les nombres $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$.

Si nous faiſons maintenant $x=2$, nous avons $8+4-68+56=0$; d'où nous concluons que $x=2$ eſt une racine poſitive, & qu'ainſi $x-2$ eſt un diviſeur de notre équation, au moyen de quoi nous trouvons

facilement les deux autres racines; car diviſant effectivement par $x-2$, on a

$$x-2)\ x^3+xx-34x+56\ (xx+3x-28$$
$$\underline{x^3-2xx}$$
$$3xx-34x+56$$
$$\underline{3xx-6x}$$
$$-28x+56$$
$$\underline{-28x+56}$$
$$0.$$

Et ſi on fait ce quotient $xx+3x-28=0$, on trouve les deux autres racines, qui ſeront $x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+28}=-\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2}$, c'eſt-à-dire $x=4$ & $x=-7$; & tenant compte de la racine trouvée ci-deſſus, $x=2$, on voit clairement qu'en effet l'équation a deux racines poſitives & une négative. Nous donnerons encore quelques autres exemples pour rendre la choſe encore plus évidente.

727.

Premiere queſtion. On a deux nombres, leur différence eſt 12, leur produit mul-

tiplié par leur ſomme fait 14560. Quels ſont ces nombres?

Soit x le plus petit des deux nombres, le plus grand ſera $x+12$, leur produit, $=xx+12x$, multiplié par la ſomme $2x+12$, donne $2x^3+36xx+144x=14560$; & diviſant par 2, on a $x^3+18xx+72x=7280$.

Or le dernier terme 7280 eſt trop grand pour qu'on puiſſe entreprendre l'eſſai de tous ſes diviſeurs, & nous remarquons qu'il eſt diviſible par 8; c'eſt pourquoi on fera $x=2y$, parce qu'après la ſubſtitution la nouvelle équation, $8y^3+72yy+144y=7280$, étant diviſée par 8, ſe réduira à celle-ci, $y^3+9yy+18y=910$, pour laquelle on n'a beſoin d'eſſayer que les diviſeurs 1, 2, 5, 7, 10, 13, &c. du nombre 910. Or il eſt évident que les premiers, 1, 2, 5, ſont trop petits; en commençant donc par la ſuppoſition de $y=7$, on trouve auſſi tôt que c'eſt là une des racines; car la ſubſtitution donne $343+441+126=910$.

Il ſuit que $x=14$, & on trouvera les deux autres racines en diviſant $y^3+9yy+18y-910$ par $y-7$, ce que nous allons faire:

$$y-7)\,y^3+9yy+18y-910\,(yy+16y+130$$
$$\underline{y^3-7yy}$$
$$16yy+18y-910$$
$$\underline{16yy-112y}$$
$$130y-910$$
$$\underline{130y-910}$$
$$0.$$

Suppoſant maintenant ce quotient $yy+16y+130=0$, on aura $yy=-16y-130$, & de-là $y=-8\pm\sqrt{-66}$: preuve que les deux autres racines ſont impoſſibles.

Réponſe. Les deux nombres cherchés ſont 14 & 26; leur produit 364, multiplié par leur ſomme 40, donne 14560.

728.

Seconde queſtion. Trouver deux nombres, dont la différence ſoit 18, & qui ſoient tels, que ſi on multiplie enſemble leur

ſomme & la différence de leurs cubes, on obtienne le nombre 275184.

Soit x le moins grand des deux nombres, $x+18$ ſera le plus grand; le cube du premier ſera $=x^3$, & le cube du ſecond $=x^3+54xx+972x+5832$; la différence des cubes $=54xx+972x+5832=54(xx+18x+108)$, multipliée par la ſomme $2x+18$ ou $2(x+9)$, donne le produit $108(x^3+27xx+270x+972)=275184$. Diviſant par 108, on a $x^3+27xx+270x+972=2548$, ou $x^3+27xx+270x=1576$. Les diviſeurs de 1576 ſont 1, 2, 4, 8, &c. les premiers 1, 2 ſont trop petits; mais ſi on eſſaie $x=4$, on trouve que ce nombre ſatisfait à l'équation.

Il reſte donc à la diviſer par $x-4$, afin de trouver les deux autres racines. Cette diviſion donne le quotient $xx+31x+394$; en faiſant donc $xx=-31x-394$, on trouvera $x=-\frac{31}{2}\pm\sqrt{\frac{961}{4}-\frac{1576}{4}}$, c'eſt-à-dire deux racines imaginaires.

Réponſe. Les nombres cherchés ſont 4 & 22.

729.

Troiſieme queſtion. Je cherche deux nombres dont la différence $=720$, & tels que ſi je multiplie le plus petit par la racine quarrée du plus grand, il me vienne 20736.

Si le plus petit eſt x, le plus grand ſera $x+720$, & il faut que $x\sqrt{x+720}=20736=8.8.4.81$. Quarrant les deux membres, j'ai $xx(x+720)=x^3+720xx=8^2.8^2.4^2.81^2$. Je fais $x=8y$; cette ſuppoſition me donne $8^3y^3+720.8^2y^2=8^2.8^2.4^2.81^2$; & diviſant par 8^3, j'ai $y^3+90yy=8.4^2.81^2$. Je ſuppoſe de plus $y=2z$, & j'ai $8z^3+4.90zz=8.4^2.81^2$, ou, en diviſant par 8, $z^3+45zz=4^2.81^2$.

Je fais encore $z=9u$, pour avoir $9^3u^3+45.9^2uu=4^2.9^4$, parce qu'en diviſant à préſent par 9^3, l'équation ſe réduit à $u^3+5uu=4^2.9$, ou $uu(u+5)=16.9=144$. Je n'ai pas de peine à voir ici que $u=4$; car dans ce cas $uu=16$ & $u+5=9$. Puis donc que $u=4$, j'ai $z=36$, $y=72$ &

$x=576$, c'est le plus petit des deux nombres cherchés; ainsi le plus grand est 1296, & en effet la racine quarrée de celui-ci, ou 36, multipliée par l'autre nombre 576, donne 20736.

730.

Remarque. Cette question admettoit une solution plus simple; car puisque la racine quarrée du plus grand nombre, multipliée par le plus petit nombre, doit donner un produit égal à un nombre donné, il faut que le plus grand des deux nombres soit un quarré. Si donc, par cette considération, nous le supposons $=xx$, l'autre nombre sera $xx-720$. Celui-ci étant multiplié par la racine quarrée du plus grand, ou par x, nous avons $x^3-720x=20736=64.27.12$. Faisons $x=4y$, nous aurons $64y^3-720.4y=64.27.12$, ou bien $y^3-45y=27.12$. Supposant de plus $y=3z$, nous trouvons $27z^3-135z=27.12$, ou en divisant par 27, $z^3-5z=12$, ou $z^3-5z-12=0$. Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12; les deux premiers sont trop petits; mais la supposition de $z=3$ donne précisément $27-15-12=0$. Par conséquent $z=3$, $y=9$ & $x=36$; d'où nous concluons que le plus grand des deux nombres cherchés, ou xx, $=1296$, & que le plus petit, ou $xx-720$, $=576$, comme ci-dessus.

731.

Quatrieme question. On a deux nombres, dont la différence est 12; le produit de cette différence par la somme des cubes, est 102144: quels sont ces deux nombres?

Nommant x le plus petit de ces deux nombres, le plus grand est $x+12$, le cube du premier est x^3, & le cube du second est $x^3+36xx+432x+1728$; le produit de la somme de ces cubes par la différence 12, est

$$12(2x^3+36xx+432x+1728)=102144;$$

divisant successivement par 12 & par 2, on a

$x^3+18xx+216x+864=4256$, ou
$x^3+18xx+216x=3392=8.8.53$.

Qu'on ſuppoſe $x=2y$, qu'on ſubſtitue & qu'on diviſe par 8, on aura

$$y^3+9yy+54y=8.53=424.$$

Les diviſeurs du dernier membre ſont 1, 2, 4, 8, 53, &c. 1 & 2 ſont trop petits; mais ſi l'on fait $y=4$, on trouve $64+144+216=424$. De ſorte que $y=4$ & $x=8$; d'où l'on conclut que les deux nombres cherchés ſont 8 & 20.

732.

Cinquieme queſtion. Quelques perſonnes forment une ſociété & établiſſent un fonds, auquel chacune contribue dix fois autant d'écus qu'elles ſont de perſonnes; elles gagnent ſur chaque centieme d'écus 6 écus au-delà du nombre d'écus égal à leur nombre; le profit total eſt de 392 écus; on demande combien ils ſont d'Aſſociés?

Soit x le nombre cherché; chaque Aſſocié aura fourni $10x$ écus, & tous enſemble $10xx$ écus; & puiſqu'ils gagnent $x+6$ pour cent, ils auront gagné avec le capital entier, $\frac{x^3+6xx}{10}$, ce qu'il faut égaler à 392.

On a donc $x^3+6xx=3920$, & en faiſant $x=2y$ & diviſant par 8, $y^3+3yy=490$. Les diviſeurs du ſecond membre ſont 1, 2, 5, 7, 10, &c. les trois premiers ſont trop petits; mais en ſuppoſant $y=7$, on a $343+147=490$; de ſorte que $y=7$, & $x=14$.

Réponſe. Il y avoit quatorze Aſſociés, & chacun d'eux a mis 140 écus dans la maſſe commune.

733.

Sixieme queſtion. Quelques Négocians ont en commun un capital de 8240 écus; chacun y ajoute quarante fois autant d'écus qu'ils ſont d'Aſſociés; ils gagnent avec la ſomme totale autant de fois pour cent qu'ils ſont d'Aſſociés; en partageant le profit, il ſe trouve qu'après que chacun a pris dix fois

autant d'écus qu'ils ſont d'Aſſociés, il reſte 224 écus. On demande quel étoit donc le nombre de ces Aſſociés?

Si ce nombre eſt x, chacun aura ajouté $40x$ écus au capital 8240 écus; par conſéquent tous enſemble auront ajouté $40xx$, ce qui a rendu le capital $=40xx+8240$; ils gagnent avec cette ſomme x écus pour cent; ainſi le gain total eſt $\frac{40x^3}{100}+\frac{8240x}{100}=\frac{4}{10}x^3+\frac{824}{10}x=\frac{2}{5}x^3+\frac{412}{5}x$. C'eſt de cette ſomme que chacun préleve $10x$, & par conſéquent tous enſemble $10xx$, en laiſſant un reſte de 224 écus; il faut donc que le profit ait été $10xx+224$, & qu'on ait l'équation $\frac{2x^3}{5}+\frac{412x}{5}=10xx+224$.

Multipliant par 5 & diviſant par 2, on a $x^3+206x=25xx+560$, ou $x^3-25xx+206x-560=0$: la premiere forme ſera cependant plus commode pour eſſayer. Les diviſeurs du dernier terme ſont 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16 &c. & il faut les prendre poſitifs, parce que dans la ſe-

conde forme de l'équation les ſignes varient trois fois, ce qui donne à connoître avec certitude que toutes les trois racines ſont poſitives.

Or ſi l'on eſſaye d'abord $x=1$ & $x=2$, il eſt évident que le premier membre deviendroit plus petit que le ſecond. Nous ferons donc l'eſſai des autres diviſeurs.

Quand $x=4$, on a $64+824=400+560$, ce qui ne ſatisfait point.

Quand $x=5$, on a $125+1030=625+560$, ce qui ne ſatisfait pas non plus.

Quand $x=7$, on a $343+1442=1225+560$, ce qui ſatisfait à l'équation; de ſorte que $x=7$ en eſt une racine. Cherchons donc à préſent les deux autres, en diviſant par $x-7$ la ſeconde forme de notre équation.

$$
\begin{array}{l}
x-7)\;x^3-25xx+206x-560\;(xx-18x+80\\
\quad x^3-7xx\\
\hline
\qquad -18xx+206x\\
\qquad -18xx+126x\\
\hline
\qquad\qquad 80x-560\\
\qquad\qquad 80x-560\\
\hline
\qquad\qquad\quad 0.
\end{array}
$$

Egalant le quotient à zéro, nous avons $xx-18x+80=0$ ou $xx=18x-80$, ce qui donne $x=9\pm1$, de ſorte que les deux autres racines ſont $x=8$ & $x=10$.

Réponſe. Trois réponſes ont lieu pour la queſtion propoſée : ſuivant la premiere le nombre des Négocians eſt 7, ſuivant la ſeconde il eſt 8, & ſuivant la troiſieme il eſt 10 ; le tableau ſuivant préſente la preuve de toutes :

	I.	II.	III.
Nombre des Négocians	7	8	10
Chacun fournit $40x$ - - -	280	320	400
Tous enſemble ajoutent $40xx$	1960	2560	4000
L'ancien capital étoit - -	8240	8240	8240
Le capital entier eſt $40xx+8240$ - - - - - - - -	10200	10800	12240
Ils gagnent avec ce capital autant pour cent qu'ils ſont d'Aſſociés - - - -	714	864	1224
Chacun en ôte $10x$ - - -	70	80	100
Ainſi tous enſemble prennent $10xx$ - - - - - -	490	640	1000
Donc il reſte - - - - - - -	224	224	224

CHAPITRE XII.

De la Regle de CARDAN *ou de* SCIPION FERREO.

734.

LORSQU'ON a chaſſé les fractions d'une équation du troiſieme degré, ſuivant la maniere enſeignée, & qu'aucun des diviſeurs du dernier terme ne ſe trouve être une racine de l'équation, c'eſt une marque certaine, non-ſeulement que l'équation n'a pas de racine en nombres entiers, mais qu'une racine fractionnaire même ne peut avoir lieu ; c'eſt ce que nous allons prouver.

Soit l'équation $x^3-axx+bx-c=0$, où a, b, c ſignifient des nombres entiers ; ſi on vouloit ſuppoſer, par exemple, $x=\frac{3}{2}$, on auroit $\frac{27}{8}-\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b-c$; or le premier terme a ſeul ici 8 pour dénominateur ; tous les autres ſont, ou des nombres entiers, ou diviſés ſeulement par 4 ou par 2, &

ne peuvent par conséquent faire o avec le premier terme : la même chose a lieu pour toute autre fraction.

735.

Comme donc dans ces cas les racines de l'équation ne sont ni des nombres entiers, ni des fractions, elles sont irrationnelles, ou même, ce qui arrive souvent, imaginaires. Or la maniere de les exprimer alors & de déterminer les signes radicaux qui les affectent, fait un point très-important, & qui mérite d'être expliqué ici avec soin. On attribue cette méthode, qu'on nomme *la regle de Cardan*, à *Cardan*, ou plutôt à *Scipion Ferreo*, qui ont vécu il y a quelques siecles (*).

736.

Il faut, pour entrer dans l'esprit de cette regle, considérer d'abord avec attention la nature d'un cube, dont la racine est un binome.

(*) L'histoire de cette regle, découverte dans le même temps par *Tartaléa*, se lit avec autant d'intérêt que de fruit dans l'*Histoire des Mathématiques*, par M. *de Montuc la*

Soit $a+b$ cette racine, le cube en est $a^3+3aab+3abb+b^3$, & nous voyons qu'il est composé des cubes des deux termes du binome, & outre cela de deux termes moyens, $3aab+3abb$, qui ont le facteur commun $3ab$, lequel multiplie l'autre facteur $a+b$; c'est-à-dire que ces deux termes contiennent le triple produit des deux termes du binome, multiplié par la somme de ces termes.

737.

Qu'on suppose maintenant $x=a+b$, & qu'on prenne de part & d'autre le cube, on a $x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Or puisque $a+b=x$, on aura l'équation du troisieme degré, $x^3=a^3+b^3+3abx$ ou $x^3=3abx+a^3+b^3$, dont nous savons qu'une des racines est $x=a+b$. Toutes les fois donc qu'il se présente une telle équation, nous pouvons en assigner une racine.

Soit, par exemple, $a=2$ & $b=3$, on aura l'équation $x^3=18x+35$, que nous ſavons avec certitude avoir $x=5$ pour racine.

738.

Que de plus on ſuppoſe à préſent $a^3=p$ & $b^3=q$, on aura $a=\sqrt[3]{p}$ & $b=\sqrt[3]{q}$, par conſéquent $ab=\sqrt[3]{pq}$; lors donc que l'on rencontre une équation du troiſieme degré de la forme $x^3=3x\sqrt[3]{pq}+p+q$, on ſait qu'une des racines eſt $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$.

Or on peut toujours déterminer p & q, de maniere que tant $3\sqrt[3]{pq}$ que $p+q$ ſoient des quantités égales à un nombre donné; ainſi on eſt toujours en état de réſoudre une équation du troiſieme degré, de l'eſpece dont nous parlons.

739.

Soit propoſée en général l'équation $x^3=fx+g$; il s'agira ici de comparer f avec

$3\sqrt[3]{pq}$, & g avec $p+q$; c'eſt-à-dire qu'il faudra déterminer p & q de maniere que $3\sqrt[3]{pq}$ devienne égal à f, & que $p+q$ devienne égal à g; car nous ſavons alors qu'une des racines de notre équation ſera $x=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$.

740.

Nous avons donc à réſoudre ces deux équations, I.) $3\sqrt[3]{pq}=f$, & II.) $p+q=g$. La premiere donne $\sqrt[3]{pq}=\frac{f}{3}$, & $pq=\frac{f^3}{27}=\frac{1}{27}f^3$, & $4pq=\frac{4}{27}f^3$. La ſeconde équation étant quarrée, donne $pp+2pq+qq=gg$; ſi l'on en ſouſtrait $4pq=\frac{4}{27}f^3$, on a $pp-2pq+qq=gg-\frac{4}{27}f^3$, & prenant la racine quarrée de part & d'autre, on a $p-q=\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}$. Or puiſque $p+q=g$, on a $2p=g+\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}$, & $2q=g-\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}$, par conſéquent $p=\frac{g+\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}}{2}$, & $q=\frac{g-\sqrt{gg-\frac{4}{27}f^3}}{2}$.

741.

Toutes les fois donc qu'on a une équation du troisieme degré de la forme $x^3 = fx + g$, quels que soient les nombres f & g, on a toujours pour une des racines

$$x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}};$$

c'est-à-dire une quantité irrationnelle, qui renferme non-seulement le signe radical quarré, mais aussi le signe de la racine cubique; & c'est cette formule qu'on nomme proprement la *regle de Cardan*.

742.

Appliquons-la à quelques exemples, pour en mieux faire comprendre l'usage.

Soit $x^3 = 6x + 9$, on aura $f = 6$ & $g = 9$; ainsi $gg = 81$, $f^3 = 216$, & $\frac{4}{27}f^3 = 32$; puis $gg - \frac{4}{27}f^3 = 49$, & $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = 7$. Donc une des racines de l'équation donnée est $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$.

743.

Soit proposée cette autre équation $x^3 = 3x + 2$; on aura $f = 3$ & $g = 2$; par conséquent $gg = 4$, $f^3 = 27$, & $\frac{4}{27}f^3 = 4$; ce qui nous donne $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = 0$; d'où il s'ensuit qu'une des racines est $x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2$.

744.

Il arrive souvent cependant que, quoiqu'une telle équation ait une racine rationnelle, on ne peut trouver cette racine par la regle dont nous nous occupons.

Soit donnée l'équation $x^3 = 6x + 40$, où $x = 4$ est une des racines. Nous avons ici $f = 6$ & $g = 40$, de plus $gg = 1600$ & $\frac{4}{27}f^3 = 32$; ainsi $gg - \frac{4}{27}f^3 = 1568$, & $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = \sqrt{1568} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 2} = 28\sqrt{2}$; par conséquent une des racines $x = \sqrt[3]{\frac{40 + 28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40 - 28\sqrt{2}}{2}}$, ou

$x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$; & cette quantité eſt réellement $=4$, quoiqu'à la premiere inſpection on ne s'en doute pas. En effet le cube de $2+\sqrt{2}$ étant $20+14\sqrt{2}$, on a réciproquement la racine cubique de $20+14\sqrt{2}$ égale à $2+\sqrt{2}$; de même $\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}$; donc notre racine $x = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$ (*).

745.

On pourroit objecter à cette regle, qu'elle ne s'étend pas à toutes les équations du troiſieme degré, parce que le quarré de x ne s'y rencontre point, c'eſt-à-dire

(*) On n'a pas pour l'extraction de la racine cubique de ces binomes, des regles générales comme pour l'extraction de la racine quarrée ; celles que différens Auteurs ont données ramenent toujours à une équation mixte du troiſieme degré ſemblable à la propoſée. Au reſte, quand l'extraction de la racine cubique eſt poſſible, la ſomme des deux radicaux qui repréſentent la racine de l'équation, devient toujours rationnelle, de ſorte qu'on peut la trouver immédiatement par la méthode indiquée à l'article 722.

que le ſecond terme manque dans l'équation. Mais nous remarquerons que toute équation complette peut ſe transformer en une autre où le ſecond terme manque, après quoi l'on peut par conſéquent appliquer la regle.

Soit, pour le prouver, l'équation complette $x^3-6xx+11x-6=0$. Si l'on prend ici le tiers du coefficient 6 du ſecond terme, & qu'on faſſe $x-2=y$, on aura

$x=y+2$, $xx=yy+4y+4$, &

$x^3=y^3+6yy+12y+8$; par conſéquent

$$\begin{array}{rrrrr} x^3 = & y^3 & +6yy & +12y & +8 \\ -6xx = & & -6yy & -24y & -24 \\ +11x = & & & +11y & +22 \\ -6 = & & & & -6 \\ \hline x^3-6xx+11x-6 = & y^3 & & -y. & \end{array}$$

On a donc l'équation $y^3-y=0$, dont la réſolution eſt manifeſte, puiſqu'on voit ſur le champ qu'elle eſt le produit des facteurs $y(yy-1)=y(y+1)(y-1)=0$.

Si l'on fait maintenant chacun de ces facteurs $=0$, on a

I. $\begin{cases} y=0, \\ x=2, \end{cases}$ II. $\begin{cases} y=-1, \\ x=1, \end{cases}$ III. $\begin{cases} y=1, \\ x=3, \end{cases}$
c'est-à-dire, les trois racines trouvées déja plus haut.

746.

Soit donnée à préſent l'équation générale du troiſieme degré, $x^3+axx+bx+c=0$, de laquelle il s'agiſſe d'éliminer le ſecond terme.

On ajoutera pour cet effet à x le tiers du coefficient du ſecond terme, en conſervant le même ſigne, & on écrira pour cette ſomme une nouvelle lettre, par exemple, y; de ſorte qu'on aura $x+\frac{1}{3}a=y$, & $x=y-\frac{1}{3}a$, d'où réſulte le calcul ſuivant:

$$x=y-\tfrac{1}{3}a,\ xx=yy-\tfrac{2}{3}ay+\tfrac{1}{9}aa,$$
$$\&\ x^3=y^3-ayy+\tfrac{1}{3}aay-\tfrac{1}{27}a^3;$$

par conſéquent

$$\begin{array}{rl} x^3= & y^3-ayy+\frac{1}{3}aay-\frac{1}{27}a^3 \\ axx= & +ayy-\frac{2}{3}aay+\frac{1}{9}a^3 \\ bx= & +by-\frac{1}{3}ab \\ c= & +c \\ \hline & y^3-(\frac{1}{3}aa-b)y+\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c=0, \end{array}$$

équation dans laquelle le ſecond terme manque.

747.

Nous ſommes en état, moyennant cette transformation, de trouver les racines de toutes les équations du troiſieme degré; l'exemple qui ſuit en fournira une preuve.

L'équation propoſée eſt $x^3-6xx+13x-12=0$.

Il s'agit d'abord de chaſſer le ſecond terme; on fera pour cet effet $x-2=y$, & on aura $x=y+2$, $xx=yy+4y+4$, & $x^3=y^3+6yy+12y+8$; donc

$$\begin{array}{rl} x^3= & y^3+6yy+12y+8 \\ -6xx= & -6yy-24y-24 \\ +13x= & +13y+26 \\ -12= & -12 \\ \hline & y^3+y-2=0 \end{array}$$

ou $y^3=-y+2$.

Si on compare cette équation avec la formule $x^3=fx+g$, on a $f=-1$, $g=2$;

donc $gg = 4$, & $\frac{4}{27}f^3 = -\frac{4}{27}$; de plus $gg - \frac{4}{27}f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$, & $\sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$; par conséquent

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{2+\frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{2-\frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)}, \text{ ou}$$

$y = \sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{21}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2\sqrt{21}}{9}} = \sqrt[3]{\frac{9+2\sqrt{21}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{9-2\sqrt{21}}{9}} = \sqrt[3]{\frac{27+6\sqrt{21}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{27-6\sqrt{21}}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{27+6\sqrt{21}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{27-6\sqrt{21}}$; & il reste à substituer cette valeur dans $x = y + 2$.

748.

Nous sommes parvenus dans la solution de cet exemple, à une quantité doublement irrationnelle; mais il ne faut pas en conclure sur le champ que la racine est irrationnelle, parce qu'il pourroit arriver par un heureux hasard, que les binomes $27 \pm 6\sqrt{21}$ fussent des cubes effectifs; & c'est aussi ce qui a lieu ici; car le cube

de $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ étant $\frac{216+48\sqrt{21}}{8} = 27 + 6\sqrt{21}$, il suit que la racine cubique de $27 + 6\sqrt{21}$ est $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$, & que la racine cubique de $27 - 6\sqrt{21}$ est $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$. Cela fait donc que la valeur trouvée pour y, devient $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Or puisque $y = 1$, nous avons $x = 3$ pour une des racines de l'équation proposée, & les deux autres se trouveront en divisant l'équation par $x - 3$.

$$
\begin{array}{l}
x-3)\,x^3 - 6xx + 13x - 12\,(xx - 3x + 4 \\
\qquad x^3 - 3xx \\
\hline
\qquad\quad -3xx + 13x - 12 \\
\qquad\quad -3xx + 9x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 4x - 12 \\
\qquad\qquad\qquad 4x - 12 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0.
\end{array}
$$

Et en égalant à o le quotient $xx - 3x + 4$; l'on a $xx = 3x - 4$; & $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$. Ce ſont les deux racines en queſtion, mais elles ſont imaginaires.

749.

C'eſt par haſard, comme nous l'avons remarqué, qu'on a pu, dans l'exemple précédent, extraire la racine cubique des binomes trouvés, & ce cas n'a lieu que lorſque l'équation a une racine rationnelle, & que par conſéquent on emploie avec plus de facilité, pour trouver cette racine, les regles du Chapitre précédent. Mais quand aucune racine rationnelle n'a lieu, il n'eſt pas poſſible au contraire d'exprimer autrement la racine qu'on trouve, qu'en ſuivant la regle de *Cardan*; de ſorte qu'il eſt impoſſible alors d'appliquer des réductions. Par exemple, dans l'équation $x^3 = 6x + 4$, on a $f = 6$ & $g = 4$; de ſorte

que $x = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}$, ce qui ne peut s'exprimer d'une maniere différente (*).

(*) On a dans cet exemple $\frac{4}{27} f^3$ plus petit que gg, ce qui eſt le cas très-connu ſous le nom du *cas irréductible du troiſieme degré*, & qui eſt d'autant plus remarquable, qu'alors toutes les trois racines ſont toujours réelles. On ne peut dans ce cas faire uſage de la formule de *Cardan*, qu'en y appliquant des méthodes d'approximation, par exemple, en la transformant en une ſerie infinie. M. *Lambert* a donné dans l'ouvrage cité à l'article 40, des tables particulieres qui ſervent à trouver facilement les valeurs numériques des racines des équations du troiſieme degré, tant dans le cas irréductible que dans les autres cas. On peut auſſi employer pour cet uſage les tables ordinaires des ſinus. Voyez l'*Aſtronomie ſphérique* de M. *Mauduit*, imprimée à Paris en 1765.

Au reſte il ne faut pas chercher dans cet Ouvrage de M. *Euler*, tout ce qu'il y avoit à dire ſur les réſolutions, ſoit directes, ſoit approchées, des équations. Il avoit à traiter encore trop d'objets curieux & importans, pour s'appeſantir ſur ces matieres; mais qu'on conſulte l'*Hiſtoire des Mathématiques*, l'*Algebre* de M. *Clairaut*, le *Cours de Mathématiques* de M. *Bezout*, & les derniers volumes des Mémoires des Academies des Sciences de Paris & de Berlin, on y trouvera à peu près tout ce qu'on ſait aujourd'hui ſur la réſolution des équations.

CHAPITRE XIII.

De la résolution des Equations du quatrieme degré.

750.

LORSQUE la plus haute puissance de la quantité x monte au quatrieme degré, on a des *équations du quatrieme degré*, & la formule générale en est

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0.$$

Nous considérerons en premier lieu les équations du quatrieme degré *pures*, dont la formule est simplement $x^4 = f$, & dont on trouve aussi-tôt la racine en prenant de part & d'autre la racine bi-quarrée, puisqu'on obtient $x = \sqrt[4]{f}$.

751.

Comme x^4 est le quarré de xx, on se facilite beaucoup le calcul en commençant par extraire la racine quarrée; car on aura

alors $xx = \sqrt{f}$: & prenant ensuite de nouveau la racine quarrée, on a $x = \sqrt{\sqrt{f}}$; de sorte que $\sqrt[4]{f}$ n'est autre chose que la racine quarrée de la racine quarrée de f.

Si on avoit, par exemple, l'équation $x^4 = 2401$, on auroit d'abord $xx = 49$, & après cela $x = 7$.

752.

Il est vrai que voilà seulement une racine, & cependant puisqu'on trouve toujours trois racines cubiques, il n'est pas douteux que quatre racines ne doivent avoir lieu ici; mais remarquons que la méthode indiquée ne laisse pas de donner en effet ces quatre racines. Car dans l'exemple ci-dessus on a non-seulement $x = 49$, mais aussi $x = -49$; or la premiere valeur donne les deux racines $x = 7$ & $x = -7$, & la seconde valeur donne $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$, & $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$. Et voilà les quatre racines quarré-quarrées de 2401. Il en seroit de même à l'égard d'autres nombres.

753.

Après ces équations pures viennent dans l'ordre celles où le ſecond & le quatrieme terme manquent, & qui ont la forme $x^4 + fxx + g = 0$. Elles ſont réſolubles, ſuivant la regle, pour les équations du ſecond degré ; car ſi l'on fait $xx = y$, on a $yy + fy + g = 0$, ou $yy = -fy - g$, d'où l'on tire

$$y = -\tfrac{1}{2}f \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}ff - g} = -\frac{f \pm \sqrt{ff - 4g}}{2};$$

or $xx = y$; ainſi $x = \pm\sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{ff - 4g}}{2}}$, où les ſignes doubles $\pm$ indiquent toutes les quatre racines.

754.

Mais ſi l'équation contient tous les termes poſſibles, on peut toujours la regarder comme le produit de quatre facteurs. En effet ſi l'on multiplie entr'eux ces quatre facteurs, $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, on trouve le produit $x^4 - (p+q+r+s)x^3 + (pq+pr+ps+qr+qs+rs)\,xx - (pqr + pqs + prs + qrs)\,x + pqrs$, & cette formule ne peut devenir égale à o, que lorſqu'un de ces quatre facteurs eſt $= 0$. Or cela peut arriver en quatre manieres : I.) quand $x = p$, II.) quand $x = q$, III.) quand $x = r$, IV.) quand $x = s$; & ce ſont-là par conſéquent les quatre racines de l'équation.

755.

Si nous conſidérons cette formule avec quelque attention, nous remarquons, dans le ſecond terme, la ſomme des quatre racines, multipliée par $-x^3$; dans le troiſieme terme, la ſomme de tous les produits poſſibles de deux racines, multipliée par xx ; dans le quatrieme terme, la ſomme des produits des racines multipliées trois à trois, multipliée par $-x$; enfin dans le cinquieme terme, le produit de toutes les quatre racines multipliées enſemble.

756.

Comme le dernier terme contient le produit de toutes les racines, il eſt clair

qu'une telle équation du quatrieme degré ne peut avoir une racine rationnelle qui ne ſoit en même temps un diviſeur du dernier terme. Ce principe fournit donc un moyen facile de déterminer toutes les racines rationnelles, lorſqu'il y en a; puiſqu'on n'a qu'à ſubſtituer ſucceſſivement à x tous les diviſeurs du dernier terme, juſqu'à ce qu'on en trouve un qui ſatisfaſſe à l'équation; car ayant trouvé une telle racine, par exemple, $x=p$, on n'a qu'à diviſer l'équation par $x-p$, après avoir porté tous les termes du même côté, & ſuppoſer enſuite le quotient $=0$; on obtiendra une équation du troiſieme degré, qu'on pourra réſoudre par les regles données ci-deſſus.

757.

Or il eſt abſolument néceſſaire pour cela que tous les termes conſiſtent en des nombres entiers, & que le premier n'ait que l'unité pour coefficient; toutes les fois donc que quelques termes renferment des fractions, il faudra commencer par éliminer ces fractions, & c'eſt ce qu'on peut toujours faire en ſubſtituant, au lieu de x, la quantité y, diviſée par un nombre qui renferme tous les dénominateurs de ces fractions.

Par exemple, ſi l'on a l'équation $x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}xx+\frac{3}{4}x+\frac{1}{18}=0$, comme on y rencontre des fractions qui ont pour dénominateurs 2, 3 & des puiſſances de ces nombres, on ſuppoſera $x=\frac{y}{6}$, & on aura $\frac{y^4}{6^4}-\frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3}+\frac{\frac{1}{3}yy}{6^2}-\frac{\frac{3}{4}y}{6}+\frac{1}{18}=0$, équation, qui multipliée par 6^4 devient $y^4-3y^3+12yy-162y+72=0$.

Si l'on vouloit chercher maintenant ſi cette équation a des racines rationnelles, il faudroit écrire à la place de y ſucceſſivement les diviſeurs de 72, afin de voir dans quels cas la formule ſe réduiroit réellement à 0.

758.

Mais comme les racines peuvent être auſſi bien poſitives que négatives, il faudroit avec chaque diviſeur faire deux eſſais, l'un en ſuppoſant ce diviſeur poſitif, l'autre en le regardant comme négatif; cependant une nouvelle remarque en diſpenſe ſouvent (*). Toutes les fois que les ſignes $+$ & $-$ ſe ſuivent réguliérement, l'équation a autant de racines poſitives, qu'il y a de changemens dans les ſignes; & autant de fois que les mêmes ſignes reviennent ſans interruption, autant l'équation a de racines négatives. Or notre exemple contient quatre changemens de ſignes & aucune ſucceſſion; ainſi toutes les racines ſont poſitives, & on n'a pas beſoin de prendre aucun des diviſeurs du dernier terme en moins.

(*) Cette regle eſt générale pour les équations de tous les degrés, pourvu qu'il n'y ait point de racines imaginaires; les François l'attribuent à *Deſcartes*, les Anglois à *Harriot*; mais M. l'Abbé *de Gua* eſt le premier qui en ait donné une démonſtration générale. Voyez les *Mem. de l'Académie des Sciences de Paris*, pour 1741.

759.

Soit donnée l'équation $x^4+2x^3-7xx-8x+12=0$.

Nous voyons ici deux changemens de ſignes, mais auſſi deux ſucceſſions; d'où nous concluons avec certitude, que cette équation contient deux racines poſitives & autant de racines négatives, qui doivent toutes être des diviſeurs du nombre 12. Or ces diviſeurs ſont 1, 2, 3, 4, 6, 12; qu'on eſſaye donc d'abord $x=+1$, on parviendra réellement à 0; donc une des racines eſt $x=1$.

Si l'on fait enſuite $x=-1$, on trouve $+1-2-7+8+12=21-9=12$; ainſi $x=-1$ n'eſt pas une des racines. Qu'on faſſe après cela $x=2$, on trouve de nouveau la formule $=0$, & par conſéquent, pour une des racines, $x=2$; mais $y=-2$ au contraire ne ſe trouve pas être une racine. Lorſqu'on fait enſuite $x=3$, on a $81+54-63-24+12=60$, c'eſt-à-dire

que cette ſuppoſition ne ſatisfait pas; au lieu que $x=-3$, donnant $81-54-63+24+12=0$, eſt évidemment une des racines qu'on cherche. Enfin, quand on aura eſſayé $x=-4$, on verra pareillement l'équation ſe réduire à zéro; de ſorte donc que toutes les quatre racines ſont rationnelles, & ont les valeurs ſuivantes: I.) $x=1$, II.) $x=2$, III.) $x=-3$, IV.) $x=-4$; & conformément à la regle donnée ci-deſſus, deux de ces racines ſont poſitives, & les deux autres ſont négatives.

760.

Mais aucune racine ne pouvant être déterminée par cette voie, lorſque les racines ſont toutes irrationnelles, il a fallu ſonger à des expédiens pour exprimer les racines dans ce cas. On y a réuſſi au point qu'on a découvert deux routes différentes pour parvenir à la connoiſſance de ſemblables racines, quelle que ſoit la nature de l'équation du quatrieme degré.

Il ſera bon, avant que d'expliquer ces méthodes générales, que nous donnions les ſolutions de quelques cas particuliers, leſquelles peuvent ſouvent s'appliquer très-utilement.

761.

Lorſque l'équation eſt de nature, que les coefficiens des termes ſe ſuivent de la même maniere, tant dans l'ordre direct des termes, que dans l'ordre rétrograde, comme il arrive dans l'équation ſuivante (*):

$$x^4+mx^3+nxx+mx+1=0,$$

ou dans cette autre équation qui eſt plus générale:

(*) On peut nommer ces équations *réciproques*, parce qu'elles ne changent point en y mettant $\frac{1}{x}$ à la place de x. Il ſuit de cette propriété que ſi a, par exemple, eſt une des racines, $\frac{1}{a}$ en ſera une auſſi; c'eſt la raiſon pourquoi ces ſortes d'équations peuvent ſe réduire à d'autres équations, dont le degré eſt plus petit de la moitié. M. de *Moivre* donne dans ſes *Miſcellanea analytica*, p. 71, des formules générales pour la réduction de ces ſortes d'équations, de quelque degré qu'elles ſoient.

$x^4 + max^3 + naaxx + ma^3 x + a^4 = 0.$

On peut toujours regarder une telle formule comme le produit de deux facteurs, qui ſont des formules du ſecond degré, & qu'on réſout facilement. En effet, qu'on repréſente cette derniere équation par le produit $(xx + pax + aa)(xx + qax + aa) = 0$, où il s'agiſſe de déterminer p & q de maniere qu'on obtienne l'équation ſusdite, on trouvera, en effectuant la multiplication, $x^4 + (p + q) a x^3 + (pq + 2) aaxx + (p + q) a^3 x + a^4 = 0$; & pour que cette équation ſoit la même que la précédente, il faut 1°. que $p + q = m$, 2°. que $pq + 2 = n$, & par conſéquent que $pq = n - 2$.

Maintenant, quarrant la premiere de ces égalités, on a $pp + 2pq + qq = mm$; ſi on ſouſtrait de ceci la ſeconde, priſe quatre fois, ou $4pq = 4n - 8$, il reſte $pp - 2pq + qq = mm - 4n + 8$; & prenant la racine quarrée, on trouve $p - q = \sqrt{mm - 4n + 8}$. Or $p + q = m$, on aura donc par l'addition,

$2p = m + \sqrt{mm - 4n + 8}$, ou $p = \frac{m + \sqrt{mm - 4n + 8}}{2}$; & par la ſouſtraction, $2q = m - \sqrt{mm - 4n + 8}$ ou $q = \frac{m - \sqrt{mm - 4n + 8}}{2}$. Ayant donc trouvé p & q, on n'a plus qu'à ſuppoſer chaque facteur $= 0$; afin de déterminer les valeurs de x: le premier donne $xx + pax + aa = 0$, ou $xx = -pax - aa$, d'où l'on tire $x = -\frac{pa}{2} \pm \sqrt{\frac{ppaa}{4} - aa}$, ou $x = -\frac{pa}{2} \pm \frac{1}{2} a \sqrt{pp - 4}$; le ſecond facteur donne $x = -\frac{qa}{2} \pm \frac{1}{2} a \sqrt{qq - 4}$; & ce ſont-là les quatre racines de l'équation propoſée.

762.

Pour rendre cet article plus clair, ſoit donnée l'équation $x^4 - 4x^3 - 3xx - 4x + 1 = 0$. Nous avons ici $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$; par conſéquent $mm - 4n + 8 = 36$, & la racine quarrée de cette quantité $= 6$; donc $p = -\frac{4+6}{2} = 1$, & $q = -\frac{4-6}{2} = -5$; de-là réſultent les quatre racines I.) & II.) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; & III.)

& IV.) $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, c'eſt-à-d. que les quatre racines de l'équation propoſée ſont :

I.) $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, III.) $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$,

II.) $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, IV.) $x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

Les deux premieres de ces racines ſont imaginaires ou impoſſibles ; mais les deux dernieres ſont poſſibles ; puiſqu'on peut indiquer $\sqrt{21}$ auſſi exactement qu'on le ſouhaite, en exprimant cette racine par des fractions décimales. En effet, 21 étant autant que 21,00000000, on n'a qu'à tirer la racine quarrée, comme il ſuit :

```
      21|00|00|00|00|00|4,5825
      16
     ---
     85|500
       |425
     -------
    908|7500
       |7264
    --------
   9162|23600
       |18324
   ----------
  91645|527600
       |458225
       --------
         69375.
```


Puis donc que $\sqrt{21} = 4,5825$, la troiſieme racine approche d'aſſez près $x = 4,7912$, & la quatrieme, $x = 0,2087$; & il eût été facile de déterminer ces racines avec encore plus de préciſion.

Remarquons que la quatrieme racine étant à très-peu près $\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{5}$, cette valeur ſatisfera déjà aſſez exactement à l'équation ; en effet, ſi l'on fait $x = \frac{1}{5}$, on trouve $\frac{1}{625} - \frac{4}{125} - \frac{3}{25} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{31}{625}$; on auroit dû trouver o, mais la différence, comme on voit, n'eſt pas grande.

763.

Le ſecond cas où une réſolution ſemblable a lieu, eſt le même que le premier quant aux coefficiens, mais il en differe dans les ſignes ; car nous ſuppoſerons que le ſecond & le quatrieme termes ayent des ſignes différens ; une telle équation eſt donc, par exemple :

$x^4 + max^3 + naaxx - ma^3x^3 + a^4 = 0$,

qui peut être repréſentée par le produit;

$$(xx + pax - aa)(xx + qax - aa) = 0.$$

Car la multiplication réelle de ces facteurs donne

$$x^4 + (p+q)ax^3 + (pq-2)aaxx - (p+q)a^3x + a^4,$$

quantité qui eſt égale à la formule propoſée, ſi on ſuppoſe en premier lieu $p+q = m$, & en ſecond lieu $pq - 2 = n$, ou $pq = n + 2$; parce que de cette façon les quatriemes termes deviennent égaux d'eux-mêmes. Qu'on quarre, comme ci-deſſus, la premiere équation, on aura $pp + 2pq + qq = mm$; qu'on ſouſtraye de celle-ci la ſeconde priſe quatre fois, ou $4pq = 4n + 8$, il reſtera $pp - 2pq + qq = mm - 4n - 8$; la racine quarrée eſt $p - q = \sqrt{mm - 4n - 8}$, & de-là on obtient $p = \frac{m + \sqrt{mm - 4n - 8}}{2}$ & $q = \frac{m - \sqrt{mm - 4n - 8}}{2}$. Ayant donc trouvé p & q, on connoîtra par le premier facteur les deux racines $x = -\frac{1}{2}pa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{pp+4}$, & par le ſecond facteur

les deux racines $x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{qq+4}$, c'eſt-à-dire qu'on aura les quatre racines de l'équation propoſée.

764.

Soit donnée l'équation $x^4 - 3.2x^3 + 3.8x + 16 = 0$, nous avons $a = 2$ & $m = -3$, & $n = 0$; ainſi $\sqrt{mm - 4n - 8} = 1$, & par conſéquent

$$p = \frac{-3+1}{2} = -1, \text{ \& } q = \frac{-3-1}{2} = -2.$$

Donc les deux premieres racines ſont $x = 1 \pm \sqrt{5}$, & les deux dernieres ſont $x = 2 \pm \sqrt{8}$; moyennant quoi les quatre racines cherchées ſeront: I.) $x = 1 + \sqrt{5}$, II.) $x = 1 - \sqrt{5}$, III.) $x = 2 + \sqrt{8}$, IV.) $x = 2 - \sqrt{8}$. Par conſéquent les quatre facteurs de notre équation ſeront $(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8})$, & leur multiplication effective produit réellement cette équation; car les deux premiers étant multipliés entr'eux, donnent $xx - 2x - 4$, & les deux autres donnent

$xx-4x-4$; or ces deux produits multipliés pareillement l'un par l'autre, font $x^4-6x^3+24x+16$, ce qui est précisément l'équation proposée.

CHAPITRE XIV.

De la Regle de BOMBELLI, *pour réduire la résolution des Equations du quatrieme degré à celle des Equations du troisieme degré.*

765.

Nous avons fait voir plus haut, comment-on résout, par la regle de *Cardan*, les équations du troisieme degré; ainsi tout consiste principalement, pour les équations du quatrieme, à en réduire la résolution à celle des équations du troisieme degré. C'est qu'il n'est pas possible de résoudre généralement les équations du quatrieme degré sans le secours de celles du

troisieme, vu qu'ayant même déterminé une des racines, les autres ne laissent pas de dépendre d'une équation du troisieme degré. Et on peut conclure de-là qu'aussi les équations de dimensions plus hautes, présupposent la résolution de toutes les équations de degrés inférieurs.

766.

Or il y a déjà quelques siecles qu'un Italien, nommé *Bombelli*, a donné une regle pour cela, que nous nous proposons d'expliquer dans ce Chapitre (*).

Soit donnée l'équation générale du quatrieme degré, $x^4+ax^3+bxx+cx+d=0$, où les lettres a, b, c, d signifient tous les nombres imaginables. Qu'on suppose maintenant que cette équation soit la même que celle-ci, $(xx+\frac{1}{2}ax+p)^2-(qx+r)^2=0$, où il s'agisse de déter-

(*) Cette méthode appartient plutôt à *Louis Ferrari*. On la nomme improprement la *regle de Bombelli*, ainsi qu'on attribue à *Cardan* la méthode imaginée par *Scipion Ferreo*.

miner les lettres p, q & r, de maniere qu'on obtienne l'équation proposée. Si on range la nouvelle équation, on aura

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}aaxx &+ apx + pp \\ &+ 2pxx - 2qrx - rr \\ &- qqxx. \end{aligned}$$

Or les deux premiers termes sont ici déjà les mêmes que dans l'équation donnée ; le troisieme terme exige qu'on fasse $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$, ce qui donne $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$; le quatrieme terme indique qu'on doit faire $ap - 2qr = c$, ou $2qr = ap - c$; enfin on a pour le dernier terme $pp - rr = d$, ou $rr = pp - d$. Voilà donc trois équations qui doivent donner les valeurs de p, q & r.

767.

La maniere la plus facile d'en tirer ces valeurs est la suivante : qu'on prenne la premiere équation quatre fois, on aura $4qq = aa + 8p - 4b$; cette équation multipliée par la derniere, $rr = pp - d$, donne

$$4qqrr = 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b).$$

Si de plus on quarre la seconde équation, on aura $4qqrr = aapp - 2acp + cc$. Ainsi nous avons pour $4qqrr$ deux valeurs qu'on peut égaler entr'elles, ce qui fournit l'équation $8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b) = aapp - 2acp + cc$, ou, en portant tous les termes d'un même côté, $8p^3 - 4bpp + (2ac - 8d)p - aad + 4bd - cc = 0$, équation du troisieme degré, qui donnera toujours la valeur de p par les regles exposées plus haut.

768.

Ayant donc déterminé les trois valeurs de p par les données a, b, c, d, ce qui ne demande que d'avoir trouvé une seule de ces valeurs, on aura aussi les valeurs des deux autres lettres q & r; car la premiere équation donnera $q = \sqrt{\frac{1}{4}aa + 2p - b}$, & la seconde donne $r = \frac{ap - c}{2q}$. Or ces trois valeurs étant déterminées pour chaque cas

donné, voici comment on pourra trouver enfin les quatre racines de l'équation proposée :

Cette équation ayant été réduite à la forme $(xx + \frac{1}{2}axp)^2 - (qx + r)^2 = 0$, on aura $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 = (qx + r)^2$, & en tirant la racine, $xx + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$, ou bien $xx + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$. La premiere équation donne $xx = (q - \frac{1}{2}a)x - p + r$, d'où l'on peut avoir deux racines ; & la seconde équation, à laquelle on peut donner la forme $xx = -(q + \frac{1}{2}a)x - p - r$, fournira les deux autres racines.

769.

Eclairciſſons cette regle par un exemple, & ſuppoſons donnée l'équation $x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0$. Si nous la comparons avec notre formule générale, nous avons $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$, & par conſéquent l'équation qui doit donner la valeur de p eſt $8p^3 - 140pp + 808p$

$-1540 = 0$, ou $2p^3 - 35pp + 202p - 385 = 0$. Les diviſeurs du dernier terme ſont 1, 5, 7, 11, &c. Le premier 1 ne ſatisfait pas ; mais en faiſant $p = 5$, on trouve $250 - 875 + 1010 - 385 = 0$, en ſorte que $p = 5$. Si on ſuppoſe de plus $p = 7$, on trouve $686 - 1715 + 1414 - 385 = 0$, marque que $p = 7$ eſt la ſeconde racine. Il reſte à trouver la troiſieme racine : qu'on diviſe donc l'équation par 2, pour avoir $p^3 - \frac{35}{2}pp + 101p - \frac{385}{2} = 0$, & qu'on conſidere que le coefficient du ſecond terme, ou $\frac{35}{2}$, étant la ſomme de toutes les trois racines, & les deux premieres faiſant enſemble 12, la troiſieme doit néceſſairement être $\frac{11}{2}$.

Nous connoiſſons par conſéquent les trois racines en queſtion. Mais remarquons qu'une ſeule eût ſuffi, parce que chacune donne également les quatre racines de notre équation du quatrieme degré.

770.

Pour le prouver, soit d'abord $p=5$; nous aurons $q=\sqrt{25+10-35}=0$, & $r=-\frac{50+50}{0}=\frac{0}{0}$. Or rien n'étant déterminé par-là, prenons la troisieme équation $rr=pp-d=25-24=1$, de sorte que $r=1$; nos deux équations du second degré seront:

I.) $xx=5x-4$, II.) $xx=5x-6$.

La premiere donne les deux racines $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$, ou $x=\frac{5\pm3}{2}$, c'est-à-dire $x=4$ & $x=1$.

La seconde équation donne $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5\pm1}{2}$, c'est-à-dire, $x=3$ & $x=2$.

Mais supposons maintenant $p=7$, nous aurons $q=\sqrt{25+14-35}=2$ & $r=-\frac{70+50}{4}=-5$, d'où résultent les deux équations du second degré, I.) $xx=7x-12$, II.) $xx=3x-2$; la premiere donne $x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$, ou $x=\frac{7\pm1}{2}$, ainsi $x=4$ & $x=3$; la seconde fournit la racine $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3\pm1}{2}$, & par conséquent $x=2$, & $x=1$; de sorte que par cette seconde supposition on trouve les mêmes quatre racines que par la premiere.

Enfin les mêmes racines se trouvent, par la troisieme valeur de p, $=\frac{11}{2}$. Car on a dans ce cas $q=\sqrt{25+11-35}=1$, & $r=-\frac{55+50}{2}=-\frac{5}{2}$; & par-là les deux équations du second degré,

I.) $xx=6x-8$, II.) $xx=4x-3$.

On tire de la premiere, $x=3\pm\sqrt{1}$, c'est-à-dire, $x=4$ & $x=2$; & de la seconde, $x=2\pm\sqrt{1}$, c'est-à-dire, $x=3$ & $x=1$, ce qui forme encore les quatre racines trouvées ci-devant.

771.

Soit proposée cette autre équation, $x^4-16x-12=0$, dans laquelle $a=0$, $b=0$, $c=-16$, $d=-12$. Notre équation du troisieme degré sera, $8p^3+96p-256=0$, ou $p^3+12p-32=0$, & on peut rendre cette équation encore plus simple, en faisant $p=2t$; car on a alors $8t^3$

$+24t-32=0$, ou $t^3+3t-4=0$. Les diviſeurs du dernier terme ſont 1, 2, 4. Une des racines ſe trouve être $t=1$; donc $p=2$, $q=\sqrt{4}=2$, & $r=\frac{16}{4}=4$. Par conſéquent les deux équations du ſecond degré ſont $xx=2x+2$, & $xx=-2x-6$, & elles fourniſſent les racines $x=1\pm\sqrt{3}$ & $x=-1\pm\sqrt{-5}$.

772.

Nous tâcherons de rendre encore plus familiere la réſolution dont nous parlons, en la répétant toute entiere dans l'exemple ſuivant :

On a l'équation $x^4-6x^3+12xx-12x+4=0$, qui doit être contenue dans la formule $(xx-3x+p)^2-(qx+r)^2=0$, dans la premiere partie de laquelle on a mis $-3x$, parce que -3 eſt la moitié du coefficient -6 du ſecond terme de l'équation propoſée. Cette formule étant développée, donne $x^4-6x^3+(2p+9-qq)xx-(6p+2qr)x+pp-rr=0$, à

comparer avec notre équation, & il en réſulte les égalités ſuivantes :

I.) $2p+9-qq=12$, II.) $6p+2qr=12$, III.) $pp-rr=4$. La premiere donne, $qq=2p-3$; la ſeconde, $2qr=12-6p$, ou $qr=6-3p$; la troiſieme, $rr=pp-4$. Multipliant rr par qq, on a $qqrr=2p^3-3pp-8p+12$; & d'un autre côté, ſi on quarre la valeur de qr, on a $qqrr=36-36p+9pp$; ainſi nous avons l'équation $2p^3-3pp-8p+12=9pp-36p+36$, ou $2p^3-12pp+28p-24=0$, ou $p^3-6pp+14p-12=0$, dont une des racines eſt $p=2$; & il s'enſuit que $qq=1$, $q=1$ & $qr=r=0$. Donc notre équation ſera $(xx-3x+2)^2=xx$, & la racine quarrée en ſera $xx-3x+2=\pm x$. Si on adopte le ſigne ſupérieur, on a $xx=4x-2$; & en admettant le ſigne inférieur, on obtient $xx=2x-2$, d'où ſe tirent les quatre racines $x=2\pm\sqrt{2}$, & $x=1\pm\sqrt{-1}$.

CHAPITRE XV.

D'une nouvelle méthode de réſoudre les Equations du quatrieme degré.

773.

Nous avons vu comment, par la regle de *Bombelli*, on réſout les équations du quatrieme degré par le moyen d'une équation du troiſieme degré; mais on a trouvé, depuis l'invention de cette regle, une autre voie pour parvenir à cette réſolution; & comme cette méthode eſt tout-à-fait différente de la premiere, elle mérite d'être expliquée ſéparément (*).

774.

On ſuppoſe que la racine d'une équation du quatrieme degré a la forme $x=\sqrt{p}$

(*) La méthode dont il va être queſtion, appartient à M. *Euler* lui-même. Il l'a expoſée dans le ſixieme volume des anciens Commentaires de Pétersbourg.

$+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, où les lettres p, q, r ſignifient les racines d'une équation du troiſieme degré, $z^3-fzz+gz-h=0$; en ſorte que $p+q+r=f$, $pq+pr+qr=g$, & $pqr=h$. Cela poſé, on quarre la formule adoptée, $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, & on a $xx=p+q+r+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$; & puiſque $p+q+r=f$, on a $xx-f=2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$; on prend de nouveau les quarrés, & on trouve $x^4-2fxx+ff=4pq+4pr+4qr+8\sqrt{ppqr}+8\sqrt{pqqr}+8\sqrt{pqrr}$. Or $4pq+4pr+4qr=4g$, ainſi l'équation devient $x^4-2fxx+ff-4g=8\sqrt{pqr}.(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$; mais $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=x$, & $pqr=h$, ou $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}$; donc on parvient à l'équation du quatrieme degré $x^4-2fxx-8x\sqrt{h}+ff-4g=0$, dont une des racines eſt ſurement $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, & où p, q & r ſont les racines de l'équation du troiſieme degré, $z^3-fzz+gz-h=0$.

775.

L'équation du quatrieme degré, à laquelle nous fommes parvenus, peut être regardée comme générale, quoique le fecond terme x^3 y manque; car nous ferons voir plus bas qu'une équation complette quelconque peut être transformée en une autre où le fecond terme foit ôté.

Soit donc propofée l'équation $x^4 - axx - bx - c = 0$, pour en déterminer une racine. Nous la comparerons avec la formule trouvée, afin de parvenir aux valeurs de f, g & h; il faut 1°. que $2f = a$, & $f = \frac{a}{2}$; 2°. que $8\sqrt{h} = b$, ainfi $h = \frac{bb}{64}$; 3°. que $ff - 4g = -c$, ou $\frac{aa}{4} - 4g + c = 0$, ou $\frac{1}{4}aa + c = 4g$; par conféquent que $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$.

776.

Puis donc que l'équation $x^4 - axx - bx - c = 0$, donne les valeurs des lettres f, g & h, de maniere que $f = \frac{1}{2}a$, $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$, & $h = \frac{1}{64}bb$, ou $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$, on formera de ces valeurs l'équation du troifieme degré $z^3 - fzz + gz - h = 0$, pour en chercher les trois racines par la regle connue. Et fi l'on fuppofe ces racines, I.) $z = p$, II.) $z = q$, III.) $z = r$, il faut qu'une des racines de notre équation du quatrieme degré foit $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

777.

Il femble d'abord que cette méthode ne fournit qu'une feule des racines de l'équation propofée; mais fi on réfléchit que chaque figne $\sqrt{}$ peut être pris, tant négativement que pofitivement, on fentira fur le champ que cette formule contient même toutes les quatre racines.

Il y a plus, fi on vouloit admettre tous les changemens poffibles des fignes, on auroit huit valeurs différentes pour x, & cependant quatre feulement peuvent avoir lieu. Mais remarquons que le produit de ces trois termes, qui eft $\sqrt{pqr}$, doit être

égal à $\sqrt{h}=\frac{1}{8}b$, & que ſi $\frac{1}{8}b$ eſt poſitif, le produit des termes $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ & $\sqrt{r}$, doit pareillement être poſitif, de ſorte que les variations admiſſibles ſe réduiſent aux quatre qui ſuivent:

I.) $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$,
II.) $x=\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$,
III.) $x=-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$,
IV.) $x=-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$.

De même, quand $\frac{1}{8}b$ eſt négatif, on a ſimplement les quatre valeurs de x que voici:

I.) $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$,
II.) $x=\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$,
III.) $x=-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$,
IV.) $x=-\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$.

Cette remarque nous met en état de déterminer les quatre racines dans tous les cas; l'exemple ſuivant le fera voir.

778.

Soit propoſée l'équation du quatrieme degré $x^4-25xx+60x-36=0$, dans laquelle le ſecond terme manque. Si nous la comparons avec la formule générale, nous avons $a=25$, $b=-60$ & $c=36$, & après cela $f=\frac{25}{2}$, $g=\frac{625}{16}+9=\frac{769}{16}$, & $h=\frac{225}{4}$; moyennant quoi notre équation du troiſieme degré devient:

$$z^3-\frac{25}{2}zz+\frac{769}{16}z-\frac{225}{4}=0.$$

Pour chaſſer d'abord les fractions, faiſons $z=\frac{u}{4}$; nous aurons $\frac{u^3}{64}-\frac{25}{2}\cdot\frac{u^2}{16}+\frac{769}{16}\cdot\frac{u}{4}-\frac{225}{4}=0$, & en multipliant par le plus grand dénominateur, $u^3-50uu+769u-3600=0$. Il faut déterminer les trois racines de cette équation; elles ſe trouvent toutes trois poſitives; l'une d'elles eſt $u=9$, & en diviſant l'équation par $u-9$, on trouve la nouvelle équation $uu-41u+400=0$, ou $uu=41u-400$, qui donne $u=\frac{41}{2}\pm\sqrt{\frac{1681}{4}-\frac{1600}{4}}=\frac{41\pm9}{2}$; de ſorte que les

trois racines sont $u=9$, $u=16$, & $u=25$. Par conséquent

I.) $z=\frac{9}{4}$, II.) $z=4$, III.) $z=\frac{25}{4}$.

Et voilà donc les valeurs des lettres p, q & r, c'est-à-dire que $p=\frac{9}{4}$, $q=4$, $r=\frac{25}{4}$. Maintenant, si nous faisons attention que $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}=-\frac{15}{2}$, & qu'ainsi cette valeur $=\frac{1}{8}b$ est négative, il nous faudra, pour nous conformer à ce qui a été dit à l'égard des signes des racines $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ & $\sqrt{r}$, prendre tous ces trois radicaux en *moins*, ou n'en prendre qu'un seul en *moins*; & par conséquent, comme $\sqrt{p}=\frac{3}{2}$, $\sqrt{q}=2$ & $\sqrt{r}=\frac{5}{2}$, les quatre racines de l'équation proposée se trouvent être:

$$\text{I.)}\ x=\frac{3}{2}+2-\frac{5}{2}=1,$$
$$\text{II.)}\ x=\frac{3}{2}-2+\frac{5}{2}=2,$$
$$\text{III.)}\ x=-\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}=3,$$
$$\text{IV.)}\ x=-\frac{3}{2}-2-\frac{5}{2}=-6.$$

De ces racines résultent les quatre facteurs,

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)=0.$$

Les deux premiers, multipliés ensemble, donnent $xx-3x+2$; le produit des deux derniers est $xx+3x-18$, & en multipliant ces deux produits l'un par l'autre, on trouve exactement l'équation proposée.

779.

Il nous reste à faire voir comment une équation du quatrieme degré, dans laquelle le second terme se trouve, peut être transformée en une autre où ce terme manque. Nous donnerons pour cet effet la regle suivante.

Soit proposée l'équation générale $y^4+ay^3+byy+cy+d=0$. Qu'on ajoute à y la quatrieme partie du coefficient du second terme, ou bien $\frac{1}{4}a$, & qu'on écrive à la place de la somme une nouvelle lettre x, de façon que $y+\frac{1}{4}a=x$, & par conséquent $y=x-\frac{1}{4}a$; on aura $yy=xx-\frac{1}{2}ax+\frac{1}{16}aa$, $y^3=x^3-\frac{3}{4}axx+\frac{3}{16}aax-\frac{1}{64}a^3$, & enfin ce qui suit:

$$
\begin{array}{lllll}
y^4 = x^4 - ax^3 & + \frac{3}{8}aaxx & - \frac{1}{16}a^3x & + \frac{1}{256}a^4 \\
+ ay^3 = \; + ax^3 & - \frac{3}{4}aaxx & + \frac{3}{16}a^3x & - \frac{1}{64}a^4 \\
+ byy = & + bxx & - \frac{1}{2}abx & + \frac{1}{16}aab \\
+ cy = & & + cx & - \frac{1}{4}ac \\
+ d = & & & + d \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{llll}
x^4 + 0 & - \frac{3}{8}aaxx & + \frac{1}{8}a^3x & - \frac{3}{256}a^4 \\
 & + bxx & - \frac{1}{2}abx & + \frac{1}{16}aab \\
 & & + cx & - \frac{1}{4}ac \\
 & & & + d
\end{array}
\right\} = 0.
$$

On a donc à préſent une équation, dans laquelle le ſecond terme eſt ôté, & à laquelle rien n'empêche d'appliquer la regle donnée, pour en déterminer les quatre racines. Après quoi ces valeurs de x étant trouvées, on déterminera facilement celles de y, puiſque $y = x - \frac{1}{4}a$.

780.

Voilà où on eſt parvenu juſqu'à préſent dans la réſolution des équations algébriques; c'eſt inutilement qu'on s'eſt donné beaucoup de peines pour réſoudre de la même maniere les équations du cinquieme degré & de dimenſions plus élevées, ou pour les réduire du moins à des degrés inférieurs; de ſorte qu'on n'eſt pas en état de donner des regles générales pour trouver les racines des équations qui paſſent le quatrieme degré.

Tout ce qu'on a eu de ſuccès ne s'étend qu'à des cas très-particuliers; le principal de ces cas eſt celui où une racine rationnelle a lieu; car on la trouve facilement par la méthode des diviſeurs, parce qu'on ſait qu'une telle racine doit toujours être facteur du dernier terme; le procédé, au reſte, eſt le même que celui que nous avons enſeigné pour les équations du troiſieme & du quatrieme degré.

781.

Il ſera cependant néceſſaire d'appliquer encore la regle de *Bombelli* auſſi à une équation qui n'ait point de racines rationnelles.

Soit donnée l'équation $y^4 - 8y^3 + 14yy$

$+4y-8=0$. Il faudra commencer par retrancher le second terme, en ajoutant le quart de son coefficient à y, en supposant $y-2=x$, & en substituant dans l'équation, au lieu de y sa nouvelle valeur $x+2$, au lieu de yy la valeur $xx+4x+4$, & au lieu de y^3 la valeur $x^3+6xx+12x+8$. Et faisant de même à l'égard de y^4, on aura:

$$\begin{array}{rl} y^4 = & x^4+8x^3+24xx+32x+16 \\ -8y^3 = & -8x^3-48xx-96x-64 \\ +14yy = & +14xx+56x+56 \\ +4y = & +4x+8 \\ -8 = & -8 \\ \hline & x^4+0-10xx-4x+8=0. \end{array}$$

Cette équation étant comparée avec notre formule générale, donne $a=10$, $b=4$, $c=-8$; d'où nous concluons que $f=5$, $g=\frac{17}{4}$, $h=\frac{1}{4}$ & $\sqrt{h}=\frac{1}{2}$; que le produit $\sqrt{pqr}$ sera positif; & que c'est de l'équation du troisieme degré $z^3-5zz+\frac{17}{4}z-\frac{1}{8}=0$, qu'il faut chercher les trois racines p, q, r.

782.

Retranchons d'abord les fractions de cette équation. Si nous faisons $z=\frac{u}{2}$, nous avons, après avoir multiplié par 8, l'équation $u^3-10uu+17u-2=0$, où toutes les racines sont positives. Or les diviseurs du dernier terme sont 1 & 2; si nous essayons par $u=1$, nous trouvons $1-10+17-2=6$; ainsi l'équation ne se réduit pas à zéro; mais en essayant par $u=2$, nous trouvons $8-40+34-2=0$, ce qui satisfait à l'équation, & donne à connoître que $u=2$ est une des racines. Les deux autres se trouveront en divisant par $u-2$, comme de coutume; le quotient $uu-8u+1=0$ donne $uu=8u-1$, & $u=4\pm\sqrt{15}$. Et puisque $z=\frac{1}{2}u$, les trois racines de l'équation du troisieme degré sont, I.) $z=p=1$, II.) $z=q=\frac{4+\sqrt{15}}{2}$, III.) $z=r=\frac{4-\sqrt{15}}{2}$.

783.

Ayant donc déterminé p, q, r, nous avons auſſi leurs racines quarrées, ſavoir: $\sqrt{p}=1$, $\sqrt{q}=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{2}$, & $\sqrt{r}=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{2}$.

Mais nous avons vu plus haut, (675, 676), que la racine quarrée de $a\pm\sqrt{b}$, quand $\sqrt{aa-b}=c$, s'exprime par $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$; ainſi, comme dans notre cas $a=8$ & $\sqrt{b}=2\sqrt{15}$, & que par conſéquent $b=60$ & $c=2$, nous avons $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$, & $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Or nous avons maintenant $\sqrt{p}=1$, $\sqrt{q}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$, & $\sqrt{r}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$; donc, puiſque nous ſavons auſſi que le produit de ces quantités eſt poſitif, les quatre valeurs de x ſeront celles-ci:

I.) $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=1+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$
$=1+\sqrt{5}$,

II.) $x=\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}=1-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$
$=1-\sqrt{5}$,

III.) $x=-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}=-1+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$
$=-1+\sqrt{3}$,

IV.) $x=-\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}=-1-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$
$=-1-\sqrt{3}$.

Enfin, comme nous avions $y=x+2$, les quatre racines de l'équation propoſée ſont:

I.) $y=3+\sqrt{5}$, III.) $y=1+\sqrt{3}$,
II.) $y=3-\sqrt{5}$, IV.) $y=1-\sqrt{3}$.

CHAPITRE XVI.

De la réſolution des Equations par des approximations.

784.

LORSQUE les racines d'une équation ne ſont pas rationnelles, ſoit qu'on puiſſe les exprimer par des quantités radicales, ſoit qu'on n'ait pas même cette reſſource, comme c'eſt le cas pour les équations qui paſſent le quatrieme degré, on eſt obligé de ſe

contenter de déterminer leurs valeurs par des approximations, c'eſt-à-dire par des voies qui font qu'on approche toujours davantage de la vraie valeur, jufqu'à ce que l'erreur puiſſe être cenſée nulle. On a propoſé différentes méthodes de cette eſpece, nous allons détailler les principales.

785.

Le premier moyen dont nous parlerons, ſuppoſe qu'on ait déjà déterminé aſſez exactement la valeur d'une racine (*); qu'on ſache, par exemple, qu'une telle valeur ſurpaſſe 4, & qu'elle eſt plus petite que 5. Dans ce cas, ſi l'on ſuppoſe cette valeur $=4+p$, on eſt sûr que p exprime une fraction. Or ſi p eſt une fraction, & par conſéquent moindre que l'unité, le quarré

(*) Cette méthode eſt celle que *Newton* a donnée au commencement de ſa *méthode des fluxions*. En l'approfondiſſant on la trouve ſujette à différentes imperfections; c'eſt pourquoi on y ſubſtituera avec avantage la méthode que M. *de la Grange* a donnée dans les Mémoires de Berlin, pour les années 1767 & 68.

de p, ſon cube, & en général toutes les puiſſances plus hautes de p, feront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, & cela fait que, puiſqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul. Quand on aura donc déterminé à peu près la fraction p, on connoîtra déjà plus exactement la racine $4+p$; on partira de-là pour déterminer une nouvelle valeur encore plus exacte, & on continuera de la même maniere, jufqu'à ce qu'on ait approché de la vérité autant qu'on le ſouhaitoit.

786.

Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation $xx=20$.

On voit ici que x eſt plus grand que 4 & plus petit que 5; en conſéquence de cela on fera $x=4+p$, & on aura $xx=16+8p+pp=20$; mais comme pp eſt très-

petit, on négligera ce terme pour avoir ſeulement l'équation $16+8p=20$, ou $8p=4$; elle donne $p=\frac{1}{2}$ & $x=4\frac{1}{2}$, ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité. Si donc on ſuppoſe à préſent $x=4\frac{1}{2}+p$; on eſt ſûr que p ſignifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, & qu'on pourra négliger pp à bien plus forte raiſon. On aura donc $xx=20\frac{1}{4}+9p=20$, ou $9p=-\frac{1}{4}$, & par conſéquent $p=-\frac{1}{36}$; donc $x=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}$.

Que ſi l'on vouloit approcher encore davantage de la vraie valeur, on feroit $x=4\frac{17}{36}+p$, & on auroit $xx=20\frac{1}{1296}+8\frac{34}{36}p=20$; ainſi $8\frac{34}{36}p=-\frac{1}{1296}$, $322p=-\frac{36}{1296}=-\frac{1}{36}$, & $p=-\frac{1}{36.322}=-\frac{1}{11592}$. Donc $x=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{4473}{11592}$, valeur qui approche ſi fort de la vérité, qu'on peut avec confiance regarder l'erreur comme nulle.

787.

Généraliſons ce que nous venons d'expoſer, en ſuppoſant que l'équation donnée ſoit $xx=a$, & qu'on ſache d'avance que x eſt plus grand que n, mais plus petit que $n+1$. Si après cela nous ſuppoſons $x=n+p$, en ſorte que p doive être une fraction, & que pp puiſſe ſe négliger comme une quantité très-petite, nous aurons $xx=nn+2np=a$; ainſi $2np=a-nn$, & $p=\frac{a-nn}{2n}$; par conſéquent $x=n+\frac{a-nn}{2n}=\frac{nn+a}{2n}$. Or ſi n approchoit déjà de la vraie valeur, cette nouvelle valeur $\frac{nn+a}{2n}$ en approchera encore beaucoup plus. Ainſi en la ſubſtituant à n, on ſe trouvera encore plus près de la vérité; on aura une nouvelle valeur qu'on pourra ſubſtituer de nouveau, afin d'approcher encore davantage; & on pourra continuer le même procédé auſſi loin qu'on voudra.

Soit, par exemple, $a=2$, c'eſt-à-dire qu'on demande la racine quarrée de 2; ſi

on connoît déjà une valeur aſſez approchante, & qu'on l'exprime par n, on aura une valeur de la racine encore plus approchante, exprimée par $\frac{nn+2}{2n}$. Soit donc

I.) $n = 1$, on aura $x = \frac{3}{2}$,
II.) $n = \frac{3}{2}$, on aura $x = \frac{17}{12}$,
III.) $n = \frac{17}{12}$, on aura $x = \frac{577}{408}$;

& cette derniere valeur approche ſi fort de $\sqrt{2}$, que ſon quarré $\frac{332929}{166464}$ ne differe du nombre 2 que de la petite quantité $\frac{1}{166464}$, dont il le ſurpaſſe.

788.

On pourra procéder de la même maniere, quand il s'agira de trouver par approximation des racines cubiques, quarré-quarrées, &c.

Soit donnée l'équation du troiſieme degré, $x^3 = a$, & qu'on ſe propoſe de trouver la valeur de $\sqrt[3]{a}$. On ſuppoſera, ſachant qu'elle eſt à peu près n, que $x = n + p$; on aura, en omettant pp & p^3, x^3

$= n^3 + 3nnp = a$; ainſi $3nnp = a - n^3$, & $p = \frac{a - n^3}{3nn}$; donc $x = \frac{2n^3 + a}{3nn}$. Si donc n eſt de fort près $= \sqrt[3]{a}$, la formule que l'on vient de trouver en approchera encore beaucoup plus. Mais pour une préciſion encore plus grande, on pourra la ſubſtituer à ſon tour à la place de n, & ainſi de ſuite.

Soit, par exemple, $x^3 = 2$, & qu'on veuille déterminer $\sqrt[3]{2}$. Si n approche de près le nombre cherché, la formule $\frac{2n^3 + 2}{3nn}$ exprimera ce nombre encore de plus près; qu'on faſſe donc

I.) $n = 1$, on aura $x = \frac{4}{3}$,
II.) $n = \frac{4}{3}$, on aura $x = \frac{91}{72}$,
III.) $n = \frac{91}{72}$, on aura $x = \frac{1621306 96}{1128634294}$.

789.

On emploie cette méthode avec le même ſuccès, pour trouver par approximation les racines de toutes les équations.

Supposons, pour le faire voir, qu'on ait l'équation générale du troisieme degré, $x^3+axx+bx+c=0$, où n approche déjà beaucoup d'une des racines. Faisons $x=n-p$; &, puisque p sera une fraction, négligeant les puissances de cette lettre plus hautes que le premier degré, nous aurons $xx=nn-2np$, & $x^3=n^3-3npp$, d'où résulte l'équation $n^3-3nnp+ann-2anp+bn-bp+c=0$, ou $n^3+ann+bn+c=3nnp+2anp+bp=(3nn+2an+b)p$; ainsi $p=\frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}$, & $x=n-\left(\frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}\right)=\frac{2n^3+ann-c}{3nn+2an+b}$. Cette valeur, qui est déjà plus exacte que la premiere, étant substituée à la place de n, en fournira une nouvelle encore plus exacte.

790.

Soit, pour appliquer ce procédé à un exemple, $x^3+2xx+3x-50=0$, où

$a=2$, $b=3$ & $c=-50$. Si n est censé approcher de près une des racines, $x=\frac{2n^3+2nn+50}{3nn+4n+3}$, sera une valeur encore plus proche de la vraie. Or la valeur $x=3$ n'étant pas éloignée de la véritable, nous supposerons $n=3$, & nous trouvons $x=\frac{62}{21}$. Que si nous écrivions cette nouvelle valeur à la place de n, nous en trouverions une autre encore plus exacte.

791.

Nous ne donnerons pour les équations des degrés supérieurs au troisieme, que l'exemple suivant:

Soit $x^5=6x+10$, ou $x^5-6x-10=0$, où on remarque facilement que 1 est trop petit, & que 2 est trop grand. Or, si $x=n$ est une valeur assez proche de la vraie, & qu'on fasse $x=n+p$, on aura $x^5=n^5+5n^4p$, & par conséquent $n^5+5n^4p=6n+6p+10$, ou $5n^4p-6p=6n+10-n^5$. Donc $p=\frac{6n+10-n^5}{5n^4-6}$

& $x = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$. Qu'on ſuppoſe $n = 1$; on aura $x = \frac{14}{-1} = -14$; cette valeur eſt tout-à-fait impropre, & cela vient de ce que la valeur approchée de n étoit de beaucoup trop petite. On fera donc $n = 2$, & on aura $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, valeur qui s'écarte beaucoup moins de la vraie. Si on ſe donnoit la peine de ſubſtituer maintenant, au lieu de n, la fraction $\frac{69}{37}$, on parviendroit à une valeur encore bien plus exacte de la racine x.

792.

Voilà la méthode la plus ordinaire pour trouver par approximation les racines d'une équation, & elle s'applique utilement dans tous les cas.

Nous allons indiquer cependant une autre méthode, qui mérite attention à cauſe de la facilité du calcul (*). Le fondement de

(*) La méthode d'approximation qui ſuit, ſe fonde ſur la théorie des ſéries qu'on nomme *récurrentes*, & qui

cette méthode conſiſte à déterminer pour chaque équation une ſuite de nombres, comme a, b, c, &c. tels que chaque terme de la ſuite, diviſé par le précédent, indique la valeur de la racine d'autant plus exactement, qu'on aura continué plus loin cette ſuite de nombres.

Suppoſons que nous ſoyons parvenus déjà aux termes p, q, r, s, t, &c. il faudra que $\frac{q}{p}$ indique la racine x déjà aſſez exactement, c'eſt à-dire qu'on ait à très-peu près $\frac{q}{p} = x$. On aura de même $\frac{r}{q} = x$, & la multiplication des deux valeurs donnera $\frac{r}{p} = xx$.

ont été imaginées par M. *de Moivre*. On doit cette méthode à M. *Daniel Bernoulli*, qui l'a donnée dans les anciens Commentaires de Pétersbourg, *tom. III.* Mais M. *Euler* la préſente ici ſous un point de vue un peu différent. Ceux qui ſouhaiteront d'approfondir ces matieres, peuvent conſulter les chapitres XIII & XVII du premier volume de l'*Introd. in anal. inf.* de notre célebre Auteur : Ouvrage excellent, dans lequel pluſieurs des matieres traitées dans cette premiere partie, & beaucoup d'autres qui ſont pareillement relatives aux Mathématiques pures, ſont développées avec autant de clarté que de profondeur.

De plus, comme $\frac{s}{r}=x$, on aura auſſi $\frac{s}{p}=x^3$; enſuite, puiſque $\frac{t}{s}=x$, on aura $\frac{t}{p}=x^4$, & ainſi de ſuite.

793.

Afin de nous expliquer mieux ſur cette méthode, nous commencerons par l'équation du ſecond degré $xx=x+1$, & nous ſuppoſerons que dans la ſérie ci-deſſus ſe préſentent les termes p, q, r, s, t, &c. Or, comme $\frac{q}{p}=x$, & $\frac{r}{p}=xx$, nous obtiendrons l'équation $\frac{r}{p}=\frac{q}{p}+1$, ou $q+p=r$. Et comme nous trouvons de la même maniere que $s=r+q$, & $t=s+r$; nous en concluons que chaque terme de notre ſuite eſt la ſomme des deux termes précédens; de ſorte qu'ayant les deux premiers termes, on eſt en état de continuer facilement la ſuite auſſi loin qu'on voudra. Quant à ces deux premiers termes, on peut les prendre à volonté; ſi nous ſuppoſons donc qu'ils ſoient 0, 1, notre ſuite ſera 0, 1, 1, 2, 3,

3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, &c. & telle que, ſi on en diviſe un terme quelconque par celui qui le précede immédiatement, on aura une valeur de x d'autant plus approchante de la véritable, qu'on aura choiſi un terme plus éloigné. L'erreur, à la vérité, eſt très-grande au commencement; mais plus on avance, & plus elle diminue. Voici la ſuite de ces valeurs de x, dans l'ordre où elles s'approchent toujours davantage de la véritable:

$$x=\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \frac{89}{55},\ \frac{144}{89},\ \&c.$$

Si, par exemple, on fait $x=\frac{21}{13}$, on a $\frac{441}{169}=\frac{21}{13}+1=\frac{442}{169}$, où l'erreur n'eſt que de $\frac{1}{169}$: les termes ſuivans la donneroient encore plus petite.

794.

Conſidérons auſſi l'équation $xx=2x+1$; & puiſque toujours $x=\frac{q}{p}$, & $xx=\frac{r}{p}$, nous aurons $\frac{r}{p}=\frac{2q}{p}+1$, ou $r=2q+p$;

d'où nous concluons que le double de chaque terme ajouté au terme précédent, donne le terme suivant. Si nous commençons donc encore par 0, 1, nous aurons la férie :

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, \&c.$$

d'où il s'enfuit que la valeur cherchée de x fera exprimée de plus en plus exactement par les fractions fuivantes :

$$x = \frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \frac{408}{169}, \&c.$$

lefquelles, par conféquent, approcheront toujours davantage de la vraie valeur $x = 1 + \sqrt{2}$; de forte que fi on retranche de ces fractions l'unité, la valeur de $\sqrt{2}$ fe trouvera exprimée de plus en plus exactement par les fractions :

$$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \&c.$$

Par exemple, $\frac{99}{70}$ a pour quarré $\frac{9801}{4900}$, ce qui ne differe que de $\frac{1}{4900}$ du nombre 2.

795.

Cette méthode n'eft pas moins applicable aux équations qui ont un plus grand

nombre de dimenfions. Si l'on a, par exemple, l'équation du troifieme degré $x^3 = xx + 2x + 1$, on fera $x = \frac{q}{p}$, $xx = \frac{r}{p}$, & $x^3 = \frac{ſ}{p}$, & on aura $ſ = r + 2q + p$, par où l'on voit comment, par les trois termes p, q & r, on doit déterminer le fuivant $ſ$; & comme le commencement eft toujours arbitraire, on peut former la férie qui fuit :

$$0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129, \&c.$$

de laquelle réfultent les fractions fuivantes pour les valeurs approchées de x :

$$x = \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{3}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60}, \&c.$$

les premieres de ces valeurs font prodigieufement en défaut ; mais fi on fubftitue dans l'équation, au lieu de x, $\frac{60}{28}$ ou $\frac{15}{7}$, on trouve $\frac{3375}{343} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$, où l'erreur n'eft que de $\frac{13}{343}$.

796.

Il faut remarquer cependant que toutes les équations ne font pas de nature à pouvoir y appliquer cette méthode ; & particuliérement lorfque le fecond terme manque,

elle ne peut être employée. Car soit, par exemple, $xx=2$; si on vouloit faire $x=\frac{q}{p}$ & $xx=\frac{r}{p}$, on auroit $\frac{r}{p}=2$, ou $r=2p$, c'est-à-dire $r=0q+2p$, d'où résulteroit la suite

1, 1, 2, 2; 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 &c.

de laquelle on ne peut rien conclure, parce que chaque terme, divisé par le précédent, donne toujours $x=1$, ou $x=2$. Mais on peut obvier à cet inconvénient, en faisant $x=y-1$; car de cette façon on a $yy+2y-1=2$; & si l'on fait maintenant $y=\frac{q}{p}$ & $yy=\frac{r}{p}$, on trouve l'approximation que nous avons déjà donnée ci-dessus.

797.

Il en seroit de même de l'équation $x^3=2$; elle ne fourniroit pas une telle suite de nombres qui indiquât la valeur de $\sqrt[3]{2}$. Mais on n'a qu'à supposer $x=y-1$, afin d'avoir l'équation $y^3-3yy+3y-1=2$, ou $y^3=3yy-3y+1$; car faisant à présent

$y=\frac{q}{p}$, $yy=\frac{r}{p}$, & $y=\frac{s}{p}$, on a $s=3r-3q+3p$, moyennant quoi l'on voit comment trois termes donnés déterminent le suivant.

Adoptant donc trois termes quelconques pour les premiers, par exemple 0, 0, 1, on a la série que voici:

0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324, &c.

Les deux derniers termes de cette suite donnent $y=\frac{324}{144}$ & $x=\frac{5}{4}$; & cette fraction approche en effet assez de la racine cubique de 2; car le cube de $\frac{5}{4}$ est $\frac{125}{64}$, & celui de $2=\frac{128}{64}$.

798.

Il faut observer de plus, au sujet de cette méthode, que lorsque l'équation a une racine rationnelle, & qu'on choisit le commencement de la période tel que cette racine en résulte, chaque terme de la suite, divisé par le terme précédent, donnera également la racine exactement.

Pour le faire voir, soit donnée l'équation $xx=x+2$, dont une des racines est

$x=2$; comme on a ici, pour la série, la formule $r=q+2p$, si on prend 1, 2 pour les deux premiers termes, on a la suite 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. qui est une progression géométrique dont l'exposant $=2$.

La même propriété se prouve par l'équation du troisieme degré $x^3=xx+3x+9$, qui a $x=3$ pour une des racines. Si on suppose les premiers termes 1, 3, 9, on trouvera, par la formule $s=r+3q+9p$, la série 1, 3, 9, 27, 81, 243, &c. qui est pareillement une progression géométrique.

799.

Mais lorsque le commencement de la suite s'écarte de la racine, il ne faut pas croire qu'on ira du moins en s'approchant de cette racine; car lorsque l'équation a plus d'une racine, la suite ne donne par approximation que la plus grande racine; on ne trouve pas une des moindres, à moins

d'avoir choisi les premiers termes convenablement pour cet effet; cela s'éclaircira par l'exemple suivant:

Soit l'équation $xx=4x-3$, dont les deux racines sont $x=1$ & $x=3$. La formule pour la suite est $r=4q-3p$, & si l'on prend 1, 1 pour le commencement de la série, qui indique par conséquent la plus petite racine, on a pour la suite entiere: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c. mais si on adopte pour premiers termes les nombres 1, 3, qui contiennent la plus grande racine, on a la suite: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, &c. où tous les termes indiquent avec précision la racine 3. Enfin, si on adopte un autre commencement quelconque, pourvû qu'il soit tel que la plus petite racine n'y soit pas comprise, la série approchera toujours davantage de la plus grande racine 3; c'est ce qu'on peut voir par les séries qui suivent:

Commencement,

0, 1, 4, 13, 40, 121, 364, &c.
1, 2, 5, 14, 41, 122, 365, &c.
2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095, &c.
2, 1, −2, −11, −38, −118, −362, −1091, −3278, &c.

où les quotiens de la divifion des derniers termes par les précédens, approchent toujours plus de la racine plus grande 3, & jamais de la plus petite.

800.

On peut appliquer cette méthode même à des équations qui vont à l'infini; l'équation fuivante en fournira un exemple:

$$x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + x^{\infty-4} + \text{\&c.}$$

La férie doit être telle pour cette équation, que chaque terme foit égal à la fomme de tous les précédens, c'eft-à-dire qu'on aura

1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c.

d'où l'on voit que la plus grande racine

de l'équation propofée eft exactement $x=2$; & c'eft ce qu'on peut faire voir auffi de la maniere fuivante. Qu'on divife l'équation par x^{∞}, on aura

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \text{\&c.}$$

ce qui eft une progreffion géométrique, dont la fomme fe trouve $= \frac{1}{x-1}$; de forte que $1 = \frac{1}{x-1}$; multipliant donc par $x-1$, on a $x-1=1$, & $x=2$.

801.

Outre ces deux méthodes de déterminer par des approximations les racines d'une équation, on en trouve çà & là quelques autres, mais qui font toutes ou trop pénibles ou pas affez générales. La méthode qui mérite la préférence fur toutes, eft celle que nous avons expliquée en premier lieu; car elle s'applique avec fuccès à toutes les efpeces d'équations, tandis que l'autre exige fouvent que l'équation foit préparée

d'une certaine maniere, ſans quoi on ne pourroit en faire uſage ; nous en avons vu la preuve dans différens exemples.

Fin du Tome premier.

TABLE DES *SECTIONS ET CHAPITRES* CONTENUS DANS CE VOLUME.

SECTION PREMIERE.

Des différentes Méthodes de calcul pour les grandeurs ſimples ou incomplexes.

SECTION SECONDE.

DES différentes Méthodes de calcul pour les grandeurs composées ou complexes.

SECTION TROISIEME.

Des Rapports & des Proportions.

SECTION QUATRIEME.

Des Equations algébriques, & de la résolution de ces Equations.

Fin de la Table.